ワインバーグ

場の量子論

4巻 場の量子論の現代的諸相

S. Weinberg 著
青山秀明
有末宏明 共訳

吉岡書店

ワインバーグ
場の量子論

4巻　場の量子論の現代的諸相

S. Weinberg　著
青山秀明
有末宏明　共訳

物理学叢書
80

吉岡書店

The Quantum Theory of Fields

Volume II
Modern Applications

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

Japanese translation right arranged
with Cambridge University Press, Cambridge
through Tuttle-Mori Agency, Inc., Tokyo

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

目次

1 巻 粒子と量子場

2 巻 量子場の理論形式

3 巻 非可換ゲージ理論

II 巻の序文

この巻では素粒子の弱電・強相互作用の理解に至る場の量子論の発展を述べる. これらの相互作用はすべてゲージ理論の原理に支配されていることがわかったので, この本では15－17章で電磁理論のゲージ不変性を非可換群に一般化したゲージ理論について述べることから話を始める.

ゲージ理論の最もドラマティックな局面の幾つかは高エネルギーで現れるから, くりこみ群の理論を使って調べるのが最適だ. これは18章で導入し,* 強い相互作用の現代的な非可換群ゲージ理論である量子色力学と, 物性理論での臨界現象に応用する. 19章では一般的な大局的対称性の自発的破れを取り扱い, 量子色力学の近似的で破れている SU(2)×SU(2) や SU(3)×SU(3) 対称性に応用する. くりこみ群の方法も破れた対称性も演算子積展開への応用がもっとも興味深く, これは20章で扱う.

弱電理論の理解にはゲージ対称性が鍵となるが, これは21章で調べ, 超電導性と弱電磁相互作用に応用する. アノマリーと呼ばれる量子力学的効果でも対称性が破られることがあるが, これは対称性の自発的破れと全く異なる. アノマリーとその様々な物理的効果は22章で述べる. スカーミオン, 単極子, 渦線, アノマリーが重要な役割をする経路

*訳者注: 日本語訳では, 原著II巻を分冊し, 15-19章を3巻, 20-23章を4巻とする. 原著I巻も同様に分冊し, 1-6章を1巻, 7-14章を2巻として刊行済みである.

積分の非摂動的量子補正などの物理的状態への新たな要素として拡がりのある場の配位が登場するが, 23章でこれらを調べてこの巻を終わる.

これらの事柄を歴史を辿りながら述べていくと, 論理的に説明することは不可能となる. 私は, その代りに, この本で扱う事柄をもっとも教育的になるように記述することにした. つまり, それぞれのトピックを, その動機や数学的構造が, 後の方の章で述べる事柄をなるべく知らずに理解できるように導入した. これは論理的には多少順序が違うときにでもそのようにした. たとえば, 非可換ゲージ理論を長い章で一遍に導入する代りに, 15章と17章に分けた. これは15章では16章の外場の方法の動機を与え, この外場の方法が17章で必要となるからだ.

この記述の過程で, 読者は様々な形式を学ぶだろう. これには, BRST不変性, 量子有効作用, ホモトピー理論が含まれる. バタリン・ヴィルコビスキー形式はオプションの脇道としておく. これは15章で, 開いた, または, 閉じた対称性の簡明なゲージ理論の形式として導入する. 17章では, 一般相対性理論を含む「非くりこみ可能な」ゲージ理論の無限大の相殺を調べるのに用い, 122章である種のゲージ理論が摂動論の全ての次数でアノマリーを持たないことを証明するに使う. 有効場理論の方法は, この本を通じて非常によく使う. 特に, 超電導理論を含む, 対称性が破れた理論で役立つ. 一貫して, 詳細な計算を述べた方が読者には助けになるだろうと思えるところではページを費やし, ページ数の制約の中で明確に説明できないトピックは略し, 記述が最も明確になるように努力を重ねた.

I巻とII巻を貫く目標は, 場の量子論がなぜこのような形をとり, この形でなぜこのように見事に現実の世界を記述するのかを読者に説明することにある. I巻では, なぜ我々に手の届くエネルギーで自然が有効場の量子論, 特にゲージ理論で記述されるかを強調しつつ, 場の

量子論の基礎の概略を述べた. (この本の目次の後に, I巻の章の一覧を挙げた.**) この巻では場の量子論とゲージ不変性を出発点とし, その応用に専念した.

この本は場の量子論の基礎に多少なじみのある読者に役立つだろう. 読者がI巻を読んでいることは(害にはならないが)必ずしも仮定しない. 群論とトポロジーはそれぞれ導入したときに説明する.

この本で述べる形式的な方法(BRST 不変性やくりこみ群など)は, 超対称性や超弦のような思索的な理論への応用にとって重要だ. 私はこれらの理論の将来に非常に希望を持っているが, それらには別の本一冊が必要だと思えるので, この本には含めなかった. (多分, 超対称性と超重力がIII巻の主題となるだろう.) また, 有限温度の場の理論, 格子ゲージ理論での計算法, N_c が大きいときの近似等の興味あるトピックも除外した. これらはこの本の他の部分には, 動機や数学としては必要ないし, すでにこの本は長すぎるくらいになっていたからだ.

私には場の量子論とその応用に関する非常に多くの文献をすべて読むことはできないし, それらから適切な引用をもれなくすることも不可能だ. しかし, それぞれのトピックについての原論文, ここで扱ったことの更なる発展を述べた論文や, また詳細に計算, データ, 本文で言及した証明の載った参考文献などは引用するように努めた. 前と同様に, 引用が無いからといって, そこで述べたことが私のオリジナルだというわけではない. ただし, オリジナルであることもある.

私の経験では, この巻は大学院生が1年間のコースで場の量子論の進んだトピックや素粒子論について学ぶのに適している. I巻とII巻からトピックを選べば, 場の量子論の基礎と現代的応用についての要約したコースの材料に適しているだろう. 各章には問題を付けた. これらの問題の一部は単にその章で述べた手法を使う練習になるし, 他はその章の結果をより広い理論に拡張することができることを指し

**訳者注: 日本語訳では, 1, 2, 3巻の目次を挙げた.

示している.

* * *

テキサス大学の以下の人たちから多くを学んだ. ここに感謝する. Luis Boya, Phil Candelas, Bryce DeWitt, Cecile DeWitt, Willy Fischler, Joaquim Gomis, Vadim Kaplunovsky, また, 特に Jacques Distler. それから, 以下の人たちからは様々なトピックについて有益な助けを頂いた. Luis Alvarez-Gaumé, Sidney Coleman, John Dixon, Tony Duncan, Jürg Fröhlich, Arthur Jacce, Marc Henneaux, Roman Jackiw, Joe Polchinski, Michael Tinkham, Cumrun Vaffa, Don Weingarten, Edward Witten, Bruno Zumino. Jonathan Evans はこの巻の原稿を通して読み, 多くの価値ある提案をした. この巻の1刷の修正については, Mark Byrd, Vincent Liu, Chun-yen Wang, 特に Michio Masujima の各氏を含む学生や同僚に感謝する. Alyce Wilson 氏は図を用意し, 私が LaTeX を使えるようになるまで原稿入力をし, Terry Riley 氏は数多くの書籍・文献を見つけてくれ, また Jan Duffy 氏には数多く助けていただいた. ケンブリッジ・ユニバーシティ・プレスの Maureen Storey と Alison Woollatt 両氏にはこの本の出版についての努力に, また特に編集者 Rufus Neal 氏には建設的な良い助言に感謝したい.

スティーブン・ワインバーグ

テキサス州オースティン

1995 年 12 月

記法

ラテン文字 i, j, k などの添字は, 通常三つの空間座標に相当する 1,2,3 の値をとる. 特に記したところでは, $x_4 = it$ として, それらは 1,2,3,4 の値をとる.

μ, ν などのギリシャ文字のアルファベットの中間部を使った添字は, x^0 を時間座標として, 通常四つの時空座標に相当する 1,2,3,0 の値をとる.

α, β などのギリシャ文字のアルファベットの最初の方を使った添字は, 通常, 対称性の生成子の添字に使う.

繰り返されている添字については, 特に断らない限り, 和を取る.

時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ ととる.

ダランベリアンは $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ と定義する. ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

「レビ・チビタ・テンソル」$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = +1$ を満たす完全反対称テンソル.

空間の3元ベクトルは太いボールド体の文字で表す.

アイソ・スピン空間のベクトルは矢印を使って表す.

ベクトルの上のハット記号 (ˆ) は, そのベクトルに対応する単位ベクトルを意味する. つまり, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

どの量の上の点 (˙) も, その量の時間微分を表す.

ディラック行列 γ_μ は, $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ を満たすように定義されている. また, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, および $\beta = i\gamma^0$ としている.

階段関数 $\theta(s)$ は, $s > 0$ で $+1$, $s < 0$ で 0 となる関数.

行列またはベクトル A の複素共役, 転置, エルミート共役はそれぞれ, A^*, A^{T}, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ と記す. 演算子 O のエルミート共役は $O^\dagger$ と記す. ただし, 演算子のベクトルや行列が転置されないことを強調するところではアステリスク (*) を使う. 式の終りの +H.c. または +c.c. は, それぞれ前の項のエルミート共役か複素共役の項をたすことを意味する. ディラック・スピノル u の上の棒線は, $\bar{u} = u^\dagger\beta$ を意味する. バタリン・ヴィルコビスキー形式の場 χ の反場は, 通常の複素共役や反粒子の場と区別するために, χ^* を使わずに $\chi^\ddagger$ と記す.

$\hbar$ と光速を 1 にとる単位系を用いる. この本を通して, $-e$ は電子の有理系での電荷であり, 微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となっている.

引用した数値データの終りの括弧内の数字は, そのデータの末尾の数字の不確定性を意味する. 特に述べない限り, 実験データは'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994) より引用している.

第20章

演算子積展開

ある振幅において, 一つの演算子が持ち込み別の演算子が持ち去る4元運動量が無限大に近づき, 他の全ての4元運動量が有限に留まるときのその振幅の振舞いを知る必要があることがしばしば起こる. たとえば, 20.6節では電子とハドロン H が衝突し終状態には任意のハドロンができる散乱の全断面積が, ユニタリー性により, 振幅,

$$\int d^4x \; e^{-ik\cdot x} \langle H|J^\mu(x)J^\nu(0)|H\rangle$$

の成分の線形結合 (その係数は既知) で与えられることを見る. ここで, k は電子からハドロンに与えられる4元運動量, $J^\mu(x)$ は電磁カレントだ. 深非弾性電子散乱では, あるカレント演算子によって持ち込まれ別のカレント演算子によって持ち去られる運動量 k は無限大へと近づく. 同様に, 20.5節で各種のプロパゲーターの大運動量極限を調べ, 対応するスペクトル関数の和則を導く際には, 1ハドロン状態 $|H\rangle$ を真空に置き換えた上と同様なフーリエ変換の大運動量極限に出会う.

もし $J^\mu(x)J^\nu(0)$ のような演算子積が x^μ について解析的ならば, そのフーリエ変換はフーリエ変数 k が無限大に近づくとき指数的に減

少する. フーリエ変換の大運動量極限の主要項は演算子積で時空変数が互いに近づくときに発生する. そのような演算子積の研究は1969年にウィルソンによって始められた.[1] これは元々, 通常の場の量子論に代わる理論を作る試みだった. それ以前(例えば分散関係とかファインマンのダイアグラム則など) と同様に場の量子論を迂回する努力によって貴重な一般的結果が得られたが, これらの結果は場の量子論の一般的性質として最もよく理解できる.

演算子積展開は20.1節で述べる. この展開の標準的な証明は1970年にチンマーマンによって摂動論を使って与えられた.[2] 20.1節では, これより厳密さでは劣るが, 非摂動的でより簡単な導出を場の理論の経路積分形式で与える. 20.2節ではファインマン・ダイアグラムの中の大きな運動量の流れという観点から演算子積展開の別の側面を述べる. これより摂動論的な証明が得られる.

演算子積展開には, 量子色力学のような理論で結果を得るために特に有益な局面が幾つかある. そのような性質の一つは, この展開の特異性を記述する関数がくりこみ群方程式に支配される運動量依存性を持つことだ. これにより, 漸近的に自由な理論では摂動論を使って大きな運動量での計算が可能となる. これについては20.3節で述べる. 20.4節で示す別の局面は, 対称性の自発的破れがあってもこれらの関数が基本理論の持つ対称性を完全に保っていることだ. この理論の応用は20.5節と20.6節で述べる.

20.1 展開: 記述と導出

ウィルソン[1] は2つの演算子の積 $A(x)B(y)$ で $x \to y$ での特異部分が, 他の局所演算子の和,

$$A(x)B(y) \to \sum_C F_C^{AB}(x-y)\, C(y) \tag{20.1.1}$$

で与えられると仮定した. ここで, $F_C^{AB}(x-y)$ は特異なc数関数だ. 次元解析によれば $F_C^{AB}(x-y)$ は $x \to y$ において, d_O を演算子 O の質量または運動量での次元として, $x-y$ の $d_C - d_A - d_B$ 乗で振舞う. 演算子 O に場や微分を加えると d_O は増加するから, $F_C^{AB}(x-y)$ の特異性の度合いは演算子 C が複雑になるにつれて減少する. 演算子積展開の驚くべき性質は, これが演算子の関係式だということだ. つまり, これを $\langle\beta|A(x)B(y)|\alpha\rangle$ のような行列要素に使うとき, 任意の $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ の状態について同じ関数 $F_C^{AB}(x-y)$ が現れる.

演算子 $C(y)$ が複雑になるにつれて (20.1.1) の特異性が弱まるために, この展開は積 $A(x)B(y)$ の $x \to y$ での振舞いを導く際に有効となる. 上述の単純な冪勘定はくりこみの効果によって変更を受ける. つまり, (20.1.1) の展開はある大きさ μ でくりこまれた演算子で行うべきであり, このために係数関数 $F_C^{AB}(x-y)$ に $x-y$ に加えて μ が登場する. 20.3節で漸近的自由な理論において $F_C^{AB}(x-y)$ は次元解析でわかる $x-y$ の $d_C - d_A - d_B$ 乗に加えて $\ln(x-y)^2$ の冪も持つことがわかる. より一般の理論でも, 各種の演算子 $C(y)$ が複雑になるにしたがって特異性が弱まると思われる.

運動量空間でこれに対応することは, $k \to \infty$ において,

$$\int d^4x\, e^{-ik\cdot x} A(x)B(0) \to \sum_C V_C^{AB}(k)\, C(0) \tag{20.1.2}$$

となり, これに対応して,

$$\int d^4x\, e^{-ik\cdot x} T\{A(x)B(0)\} \to \sum_C U_C^{AB}(k)\, C(0) \tag{20.1.3}$$

となることだ. ここで, $V_C^{AB}(k)$ と $U_C^{AB}(k)$ は k^μ の関数であり, 級数の項が複雑になるにつれて大きな k でより速く減少する.

ここではより一般的に, 任意個数の演算子が運ぶ運動量が無限大になるというウィルソン展開を導く. この目的のためにグリーン関数,

$$\langle T\{A_1(x_1),\, A_2(x_2),\, \ldots B_1(y_1),\, B_2(y_2)\, \ldots\}\rangle_0$$

$$= \int \left[\prod_{\ell,\, z} d\phi_\ell(z)\right] \; a_1(x_1)\, a_2(x_2) \cdots b_1(y_1)\, b_2(y_2) \cdots \exp(iI[\phi]) \tag{20.1.4}$$

において, 局所演算子 $A_1(x_1), A_2(x_2)$ 等の引数が点 x に近づき, 他の局所演算子 $B_1(y_1)$, $B_2(y_2)$ 等の引数が固定された場合を考える. ここで, 小文字 a と b は A や B の中の場の演算子を c 数の場 ϕ で置き換えること意味する. さて, 点 x を半径 R の球 $B(R)$ で囲む. R は x_1, x_2 等の間の距離よりずっと大きく, また x, y_1, y_2 等の間の距離よりはずっと小さくとる. 作用は局所的だから, これを,

$$I = \int_{z\in B(R)} d^4z\, \mathcal{L}(z) + \int_{z\notin B(R)} d^4z\, \mathcal{L}(z) \tag{20.1.5}$$

と書くことができる. こうすると, (20.1.4) は,

$$\begin{aligned}
&\langle T\{A_1(x_1),\, A_2(x_2),\, \ldots B_1(y_1),\, B_2(y_2)\, \ldots\}\rangle_0 \\
&= \int \left[\prod_{z\notin B(R),\, \ell} d\phi_\ell(z)\right] \; b_1(y_1)\, b_2(y_2) \ldots \exp\left(i\int_{z\notin B(R)} d^4z\mathcal{L}(z)\right) \\
&\quad \times \int \left[\prod_{z\in B(R),\, \ell} d\phi_\ell(z)\right] \; a_1(x_1)\, a_2(x_2) \ldots \\
&\qquad\qquad \times \exp\left(i\int_{z\in B(R)} d^4z\mathcal{L}(z)\right)
\end{aligned} \tag{20.1.6}$$

という形に書くことができる. ここでは球の内部の場についての経路積分は球の表面で場が球の外の場と滑らかにつながるという境界条件で拘束されている. この境界条件を除いては, 球の内部の場についての経路積分は球の外の場の振舞いに全く影響されない. したがって, 球の内部の場についての積分は球の表面での場と場の微分の値で表すことができる. また, 球の表面での場と場の微分の値は球の外部から内挿された内部の点 x での場と場の微分の値を使って表すことができ

る．もしこの積分を x まで内挿したc数場の積 $o(x)$ の級数として表すと,* その係数は座標の差のみの関数 $U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1-x,\, x_2-x,\, \ldots)$ となる．点 y_1, y_2 等は全て球 $B(R)$ のはるか外部にあるから, 球の外部の場の作用からこの球を除いても, $R\to 0$ の極限では何の影響もない．したがってこの極限では, x_1, x_2 等が全て x に近づくとき, (20.1.6) は以下となる．

$$\begin{aligned}\langle T\{A_1(x_1),\, A_2(x_2),\, \ldots B_1(y_1),\, B_2(y_2)\, \ldots\}\rangle_0 &\to \int\left[\prod_{\ell,\, z} d\phi_\ell(z)\right]\\ &\quad\times b_1(y_1)\, b_2(y_2)\ldots \exp\left(i\int d^4z\mathcal{L}(z)\right)\\ &\quad\times \sum_O U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1-x,\, x_2-x,\, \ldots)\; o(x)\\ &= \sum_O U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1-x,\, x_2-x,\, \ldots)\,\langle T\{O(x),\, B_1(y_1),\, B_2(y_2)\, \ldots\}\rangle_0\,.\end{aligned} \tag{20.1.7}$$

ここで $O(x)$ は $o(x)$ に対応するハイゼンベルグ表示の量子力学的演算子だ．特に, y 変数についてフーリエ変換をして適切な係数関数をかけると, これは任意の $|\alpha\rangle$ と $\langle\beta|$ の状態について,

$$\begin{aligned}\langle\beta|T\{A_1(x_1),\, A_2(x_2),\, \ldots\}|\alpha\rangle \to \sum_O U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1-x,\, x_2-x,\, \ldots)\\ \times\langle\beta|O(x)|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{20.1.8}$$

となる．これは任意の状態について成り立つから, 以下の一般的な演算子積展開が成立する．

$$T\{A_1(x_1),\, A_2(x_2),\, \ldots\} \to \sum_O U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1-x,\, x_2-x,\, \ldots)\, O(x)\,. \tag{20.1.9}$$

---

*この級数の係数が有限であるためには, これらの積は適切な無限大の因子をかけることによってくりこみをされていなければならない．これは次の節で述べる導出で明らかになる．

20.2　運動量の流れ*

ここでは演算子積展開の最も簡単な例を考える. それは一つの質量 m の実スカラー場 $\phi(x)$ が $-\frac{1}{24}g\phi^4$ の相互作用をする理論での $(n+2)$ 点ファインマン振幅において, 大きな運動量 k が一本の線から流れ込み別の線から流れ出し, 他の外線の運動量は固定されているときの漸近的振舞いだ. これを考えることにより, この場合の演算子積展開の主要項の摂動論的な証明が得られる. しかし, ここでの我々の真の目的はファインマン・ダイアグラムでの大きな運動量の流れからどのようにしてこの展開が得られるかを理解することだ. この章の補遺ではこれらの結果の一般化を論じる.

n 個の粒子の散乱振幅の連結ダイアグラムの和で, 外線から $k, p-k$ が流入し, $p_1 \cdots p_n$ が流出し, $p \equiv p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ となっているものを $\Gamma(k; p_1 \cdots p_n)$ と定義する. (さらに $\Gamma(k; p_1 \cdots p_n)$ は運動量 k と $p-k$ の外線のプロパゲーターを含むが, 固定された運動量 $p_1 \cdots p_n$ のプロパゲーターは含まないものとしておくと便利だ.) 摂動論の任意の有限次で $k \to \infty$ のときに, 以下が成立することを示したい.

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) + O(k^{-5}) . \tag{20.2.1}$$

ここで $U_{\phi^2}(k)$ は k^{-4} の大きさの項の和だ.** また, これは $p_1 \cdots p_n$ と n に独立であり, $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$ は n 本の ϕ の線と一つの ϕ^2 の挿入があり, これを有限にするために適切なくりこみ定数 Z_{ϕ^2} がかかった振幅だ. $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$ はくりこまれた演算子 $(\phi^2)_R \equiv Z_{\phi^2}\phi^2(0)$ の

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

**この章を通して, 振幅が k^A の大きさだというときは, n^ρ を固定された一般の4元ベクトルとして, $k^\rho = \kappa n^\rho$ について $\kappa \to \infty$ のときに, 振幅が κ^A に $\ln\kappa$ のある冪の項の和をかけたものに漸近することを意味する.

行列要素だから, (20.2.1) は演算子積展開の $k \to \infty$ で主要な項は,†

$$\int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\, T\{\phi_R(x)\phi_R(0)\}_C \to U_{\phi^2}(k)\, (\phi^2(0))_R \qquad (20.2.2)$$

ということを意味する.

ファインマン振幅の漸近的振舞いを知るには, 運動量空間の積分領域の中には, 一部の内線が運動量が無限大となる外線の運動量と同じ大きさの運動量を持ち, 他の内線はそうはならない領域もあるということを考慮しなければならない. ある部分ダイアグラム $\mathcal{S}$ の内線が k の大きさの運動量を持つ積分領域からの $\Gamma(k;p_1\cdots p_n)$ への寄与は, $D_{\mathcal{S}}$ を 12.1 節の法則に従って計算した部分ダイアグラム $\mathcal{S}$ の次元として, 漸近的に k^{D_S} の大きさとなる. もし, $\mathcal{S}$ がダイアグラムの残りの部分に m 本の外線と運動量 k と $p-k$ の 2 本の外線でつながっていると, (12.1.8) より $D_{\mathcal{S}} = 4-2-m-4 = -2-m$ となる. (-4 の項は, 運動量 k と $p-k$ の線の 2 つのプロパゲーターからくる. これらは $\Gamma(k;p_1\cdots p_n)$ に含めることにしておいた.) したがって Γ の漸近的振舞いは, 大きな運動量 k がダイアグラム全体かまたは部分ダイアグラムのうち, 外線が最も少ない[3] ものを流れるときの運動量空間の積分で決まっている.

$n=0$ ではこれはダイアグラム全体だ. つまり, 積分の主要な部分はどの線も k の大きさの運動量を持つような積分領域から来る. そのため, これは漸近的に k^{-2} の大きさとなる. この場合には演算子積展開のなかでこの行列要素に寄与する唯一の演算子は単位演算子 $C=1$ だ. ここでは連結ダイアグラムのみを考えているので, $n>0$ ではこの項は除外される.

$n=2$ では, 主要な寄与は全ダイアグラムと, 運動量 k と $p-k$ を持つ 2 本の外線が他の 2 本の外線と, 2 本の内線からなる橋でつながって

---

†ここでの時間順序積の添字 C は連結ダイアグラムのみを含めていることを意味する. また, この章では二つの ϕ 場の演算子積の展開のみを扱うから, V_{ϕ^2} の添字 $\phi\phi$ は省略した. 運動量 k と $p-k$ を持つ線のプロパゲーターの輻射補正と相殺項は陰に含めているので, これらの場はそれ自身くりこまれたものだ.

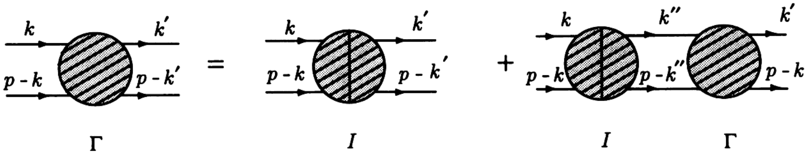


図 20.1: 積分方程式 (20.2.3) のダイアグラムによる表現. 斜線を引かれた円で Γ と記されているものは, 示された通りの外線を持つ全ての連結ファインマン・ダイアグラムの和を意味する. また, I と記され, 垂線で分けられている斜線の円は, 外線のどんな対を切っても左の線が右の線から分離されないような全ての連結ファインマン・ダイアグラムの和を表している.

いる部分ダイアグラムとの両方から来る.[††] したがって, それは漸近的に k^{-4} の振舞いをする. $n \geq 4$ では主要な寄与は運動量 k と $p-k$ を持つ2本の外線が他の $n>2$ 本の外線と, 2本の内線からなる橋でつながっている部分ダイアグラムのみから生じ, これも漸近的に k^{-4} の振舞いをする.

$n=2$ と $n \geq 4$ のダイアグラムの解析は, 一般のダイアグラムがこれらの2粒子からなる橋を複数含むために複雑となる. まず $n=2$ の場合を考えよう. $I(k,k',p)$ を ($p_1=k', p_2=p-k'$ として) $\Gamma(k;p_1,p_2)$ に寄与し2粒子既約な全てダイアグラムの和と定義する. ここで2粒子既約とは, 運動量 k と $p-k$ を持つ2本の外線は運動量 k' と $p-k'$ を持つ2本の外線から, どのような2本の内線を切っても分離されないことを意味する. これにより, $\Gamma(k;k',p-k') - I(k,k',p)$ はこのように分離できるダイアグラムからなり, したがって次のように書かれる (図 20.1を見よ) .

[††] この理論の $\phi \to -\phi$ のもとでの対称性によって外線を奇数本持つダイアグラムや部分ダイアグラムが許されないので, $m=1$ という可能性はない. また, Γ は連結ダイアグラムからしか発生しないので, $m=0$ という可能性もない.

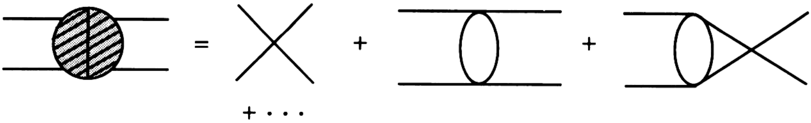


図 20.2: Φ^4 の相互作用を持つスカラー場の理論における, 核 $I(k,\ k',\ p)$ の樹木ダイアグラムと1ループ・ダイアグラム.

$$\Gamma(k;k',p-k') - I(k,k',p) = \int d^4k''\ I(k,k'',p)\Gamma(k'';k',p-k')\ . \tag{20.2.3}$$

($\Gamma(k;k',p-k')$ と同様に, 核 $I(k,k',p)$ は運動量 k と $p-k$ の線のプロパゲーターを含むが, 2重勘定を避けるために運動量 k' と $p-k'$ の線のプロパゲーターは含まない.) $I(k,k',p)$ の g^2 の次数のファインマン・ダイアグラムは図 20.2 に示した.

(20.2.3) の右辺の振舞いを調べるために, まず, 核 $I(k,k',p)$ において k' と p を固定しておいて $k \to \infty$ としたときの漸近的振舞いを見よう. この場合の主な寄与は, 運動量空間でどの内線も k の大きさの運動量を持つ領域から生じ, k^{-4} の大きさだ. これは, 他のどの領域でも k の大きさの運動量を持つ内線からなる部分ダイアグラムは4本を越える外線を持ち, したがってその寄与は k^{-4} より速く減少するからだ. これにより, $I(k,k',p)$ を k' か p について微分して, この核の漸近的振舞いを k^{-1} の因子だけ落とすことができる. したがって, k' と p を固定して $k \to \infty$ とすると以下を得る.

$$I(k,k',p) \to I_\infty(k)\ . \tag{20.2.4}$$

ここで, $I_\infty(k)$ は k のみの関数で, k^{-4} の大きさだ.

残念ながら, (20.2.3) において単に $I(k,k',p)$ をこの漸近的極限で置きかえることはできない. それは k がどれほど大きくなろうと, 積分は k' が k の大きさのところから大きな寄与を受けるからだ. この複

雑な状況に対処するために，数学的帰納法に基づくあるトリックを使う．最低次では $\Gamma(k;k',p-k')$ は2本の裸のプロパゲーターがついた一つの頂点で表される．

$$\Gamma(k;k',p-k')=\frac{ig}{(2\pi)^4(k^2+m^2)((p-k)^2+m^2)} \quad (\text{最低次})\,.$$

これが (20.2.1) の漸近的振舞いをするのは簡単に確かめることができる．したがって，$n=2$ で (20.2.1) が g についてある次数 N まで成立するとする．つまり，この次数まで $k\to\infty$ での漸近的振舞いが，

$$\Gamma(k;k',p-k)\to U_{\phi^2}(k)F_{\phi^2}(k',p-k')+O(k^{-5}) \tag{20.2.5}$$

という形となるとして，この振舞いが次の次数で成立することを示す．k' が k の大きさの値のところからの (20.2.3) の積分への寄与を消すために，(20.2.3) を以下のように書きかえる．

$$\begin{aligned}\Gamma(k;k',p-k)&=I(k,k',p)\\&\quad+\int d^4k''\ I(k,k'',p)\left[\Gamma(k'';k',p-k')-U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k')\right]\\&\quad+F_{\phi^2}(k',p-k')\int d^4k''\ I(k,k'',p)U_{\phi^2}(k'')\,.\end{aligned} \tag{20.2.6}$$

$I(k,k',p)$ は少なくとも一次の大きさだから，(20.2.6) の右辺において (20.2.5) を使える．したがって，右辺の第2項では，k'' が k の大きさの積分領域からの寄与は k^{-4+4-5} のように減少する．したがって，これは k'' が有限に残る部分に比べると無視することができ，以下の収束する積分が得られる．

$$I_\infty(k)\int d^4k''\left[\Gamma(k'';k',p-k')-U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k')\right]\,.$$

さらに，$\int d^4k''\,I(k,k'',p)U_{\phi^2}(k'')$ の主要な部分は $I(k,k'',p)$ の全ての内線が k の大きさの運動量を持つ積分領域から来るので，p について積分を微分すると，その漸近的振舞いが k^{-1} だけ落ちる．したがって，

この積分のなかで $I(k,k',p)$ は漸近的に $I(k,k')\equiv I(k,k',0)$ で置きかえることができる. したがって, $k\to\infty$ では (20.2.6) は,

$$\Gamma(k;k',p-k')\to F_{\phi^2}(k',p-k')\int d^4k''\ I(k,k'')U_{\phi^2}(k'')$$
$$+I_\infty(k)\Biggl\{1+\int d^4k''\ [\Gamma(k'';k',p-k')$$
$$-U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k')]\Biggr\} \tag{20.2.7}$$

となる. このため, g について $N+1$ の次数までの $U_{\phi^2}(k)$ と $F_{\phi^2}(k',p-k')$ を, 摂動論の低次でのこれらの関数を使って以下のように定義する.

$$U_{\phi^2}(k)=CI_\infty(k)+\int d^4k'\,I(k,k')U_{\phi^2}(k')\ , \tag{20.2.8}$$

$$F_{\phi^2}(k',p-k')=C^{-1}$$
$$\times\Biggl\{1+\int d^4k''\,[\Gamma(k'';k',p-k')$$
$$-U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k')]\Biggr\}. \tag{20.2.9}$$

ここで C は好きなように選べる定数だ. これらの定義により (20.2.5) が (20.2.7) から導かれる. .

あるくりこみ点 $k'=k(\mu)$ と $p=p(\mu)$ で $F^2_\phi(k',p-k')$ が 1 となるように定数 C を選ぶと便利だ. ここで, $k(\mu)$ と $p(\mu)$ は μ の大きさの基準的な運動量だ. そうすると,

$$C=1+\int d^4k''\Gamma(k'';k(\mu),p(\mu)-k(\mu))-\int d^4k''\,U_{\phi^2}(k'') \tag{20.2.10}$$

となる. (20.2.5) を使うと, (20.2.10) の二つの積分の発散は相殺することがわかる.

(20.2.9) はいまや以下のように書ける.

$$F_{\phi^2}(k',p-k')=Z_{\phi^2}\left\{1+\int d^4k''\,\Gamma(k'';k',p-k')\right\}\ . \tag{20.2.11}$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$Z_{\phi^2} = \left[1 + \int d^4k''\, \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu))\right]^{-1} . \qquad (20.2.12)$$

Z_{ϕ^2} は複合演算子 ϕ^2 のくりこみ定数であり, 演算子 $Z_{\phi^2}\phi^2$ が有限な 2粒子行列要素 $F_{\phi^2}(k, p-k)$ を持ち, $k = k(\mu)$ と $p = p(\mu)$ で 1 となるように定義されたものと解釈できる.

$U_{\phi^2}(k)$ や $F_{\phi^2}(k, p-k)$ を (20.2.8) と (20.2.11) を使って計算するのはあまり便利ではない. それより $\Gamma(k; k', p-k')$ を計算し, (20.2.5) と比較して $U_{\phi^2}(k)$ や $F_{\phi^2}(k, p-k)$ を読み取る方が便利だ. 関数 (12.2.26) に運動量 k と $p-k$ の線のプロパゲーターの積をかけると, 1ループの次数で以下を得る.

$$\begin{aligned}\Gamma(k; k', p-k') &= \left[\frac{-i}{(2\pi)^4(k^2+m^2)}\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4((p-k)^2+m^2)}\right]\\ &\times \left[-i(2\pi)^4 g\right]\left\{1 - \frac{g}{32\pi^2}\int_0^1 dx \left\{\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)}\right)\right.\right.\\ &\left.\left. + \ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)}\right) + \cdots\right\}\right. .\end{aligned} \qquad (20.2.13)$$

ここで s, t, u はマンデルシュタム変数,

$$s = -p^2 , \qquad t = -(k-k')^2 , \qquad u = -(p-k-k')^2$$

であり, μ はくりこみスケール, そして g は対応するくりこまれた結合定数でファインマン振幅の $s = t = u = -4\mu^2/3$ における値で定義されている. これは以下の漸近的振舞いをする.

$$\begin{aligned}\Gamma(k; k', p-k') &\to \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2}\\ &\times\left\{1 - \frac{g}{32\pi^2}\int_0^1 dx \left\{\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)}\right)\right.\right.\end{aligned}$$

$$+2\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2+k^2x(1-x)}\right)+\cdots\Bigg\}\,. \tag{20.2.14}$$

g^2 の次数では, これは,

$$U_{\phi^2}(k)=\frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2}$$
$$\times\left\{1-\frac{g}{16\pi^2}\int_0^1 dx\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2+k^2x(1-x)}\right)+\cdots\right\} \tag{20.2.15}$$

と,

$$F_{\phi^2}(k,p-k)=1-\frac{g}{32\pi^2}\int_0^1 dx\,\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2+p^2x(1-x)}\right)+\cdots \tag{20.2.16}$$

とすると, (20.2.5) と一致する. ここで, 演算子 ϕ^2 のくりこみ点 $k(\mu)$ と $p(\mu)$ を $p(\mu)^2=4\mu^2/3$ となるように結合定数 g のくりこみ点と関係付けた. したがって, $p^2=4\mu^2/3$ のときに $F_{\phi^2}(k,p-k)=1$ となる.

さて, 固定された運動量を持つ外線の本数 n が2より大きい場合を考える. これまでの議論から, $k\to\infty$ の極限では $\Gamma(k;p_1\cdots p_n)$ の主要なダイアグラムは, 運動量 k と $p-k$ を持つ2本の外線が固定された運動量を持つ n 本の外線から1対の内線を切ることによって分離することができるものだとわかる.

$$\Gamma(k;p_1\cdots p_n)\to\int d^4k'\;I(k,k',p)\,\Gamma(k';p_1\cdots p_n)\,. \tag{20.2.17}$$

以前と同様, 右辺において核 $I(k,k',p)$ の $k\to\infty$ における漸近的極限を単純に用いることはできない. これは, この積分は k' が k の大きさのときに大きな寄与を受けるからだ. この問題は, (20.2.17) を以下のように書きかえることで対処できる.

$$\Gamma(k;p_1\cdots p_n)\to\int d^4k'\;I(k,k',p)\;[\Gamma(k';p_1\cdots p_n)$$

$$
-U_{\phi^2}(k')F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)]
$$
$$
+\,F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)\int d^4k'\,I(k',k,p)\,U_{\phi^2}(k')\,. \tag{20.2.18}
$$

ここで数学的帰納法により, ある与えられた次数 N まで,

$$
\Gamma(k;p_1\cdots p_n)\to U_{\phi^2}(k)F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n) \tag{20.2.19}
$$

が成立し, その補正項は $1/k^5$ の大きさだとする. すると, 極限 (20.2.4) と (20.2.8) を使って, (20.2.18) を以下のように書きかえることができる.

$$
\Gamma(k;p_1\cdots p_n)\to I_\infty(k)\int d^4k'\,[\Gamma(k';p_s\cdots p_n)
-U_{\phi^2}(k')F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)]
+\,F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)\left[U_{\phi^2}(k)-CI_\infty(k)\right]\ .
$$

これは,

$$
CF_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)=\int d^4k'\ \left[\Gamma(k';p_s\cdots p_n)-U_{\phi^2}(k')F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)\right]
$$

または (20.2.10) と (20.2.12) を使って,

$$
F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)=Z_{\phi^2}\int d^4k'\,\Gamma(k';p_1\cdots p_n) \tag{20.2.20}
$$

と仮定すると $N+1$ の次数まで (20.2.19) と一致する. これは, 単に $F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n)$ はくりこまれた演算子 $Z_{\phi^2}\phi^2$ の行列要素であり, (20.2.1) は演算子積の表式 (20.2.2) に対応することを意味する. 特に n や運動量 $p_1\cdots p_n$ がどんな値を取ろうと $U_{\phi^2}(k)$ は同じ係数関数だ. これが証明したかったことだ.

厳密に言うと, 演算子 $(\phi^2)_R$ は二つの ϕ の積の展開で主要な項ではない. 単位演算子もあり, これは $(\phi^2)_R$ より次元が低いが, (添字 C

で示されているように) 連結でないダイアグラムは除いているので (20.2.2) からは除外されている. 前に述べたように, $\Gamma(k)$ の $n = 0$ (で $p^\mu = 0$) のダイアグラムにおいては $k \to \infty$ のとき全ての内線が k の大きさの運動量をもっている領域が主に寄与する. そして, $U_1(k)$ はこの領域の寄与だ.

高次元の演算子や, より一般の理論はこの章の補遺で考察する.

20.3 係数関数のくりこみ群方程式

前に述べたように, 演算子積展開が非常に有用である理由の一つは, その係数関数の運動量依存性がくりこみ群方程式によって決まっていることにある. これはそれらが (20.2節の $I_\infty(k)$ のように) ファインマン・ダイアグラムの和において全ての適切な運動量が揃って無限大に行く極限で, 質量をゼロにしても特異性が現れない極限の値から発生することによる. しかしながら, 演算子積の係数関数はくりこみの効果のために単純なスケール則に従わない. それらの関数はスケールに依存するくりこみ定数がかかり, スケールに依存するくりこまれた結合定数に依存する.

グリーン関数 $\Gamma_{\ell\ell'}(k, k', p)$ の演算子積展開を考える. そこでは, 線の集合 ℓ の入射運動量(これらをまとめて k, その和を p と書く) が全て揃って無限大に行き, 残りの線の集合 ℓ' が固定された流出運動量(これらをまとめて k', その和を p と書く) を持つ.

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k, k', p) \to \sum_{\mathcal{O}} U^\ell_{\mathcal{O}}(k) F_{\mathcal{O},\ell'}(k', p) \,. \qquad (20.3.1)$$

関数 $F_{\mathcal{O},\ell'}(k', p)$ はくりこまれた演算子 $\mathcal{O}_R = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}\mathcal{O}'$ の行列要素だから, ℓ の線に相当する場の積の係数 $U^\ell_{\mathcal{O}}(k)$ は $Z^{-1}_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}$ に比例するが, 同時に集合 ℓ の場の (または複合) 演算子の全てのくりこみの行

列因子の直積 $Z_{\ell',\ell}$ にも比例する. したがって,

$$\mu\frac{d}{d\mu}U^{\ell}_{\mathcal{O}} = \sum_{\ell'}\gamma_{\ell\ell'}U^{\ell'}_{\mathcal{O}} - \sum_{\mathcal{O}'}U^{\ell}_{\mathcal{O}'}\gamma_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}U^{\ell}_{\mathcal{O}} \tag{20.3.2}$$

となる. ここで,

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_{\ell\ell'} = \sum_{\ell''}\gamma_{\ell\ell''}Z_{\ell''\ell'}\ , \qquad \mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} = \sum_{\mathcal{O}''}\gamma_{\mathcal{O}\mathcal{O}''}Z_{\mathcal{O}''\mathcal{O}'} \tag{20.3.3}$$

であり, 簡単のために唯一のくりこみ可能な結合定数 g_μ は運動量が μ の大きさのくりこみ点におけるあるファインマン振幅の値として定義され, $\mu\, dg_\mu/d\mu = \beta(g_\mu)$ だとする. 次元解析が使えるように, 全ての演算子に μ の冪をかけ無次元にする. このため, Z と γ 行列の成分もまた無次元になり, 結合定数がゼロの極限で以下の値をとる.

$$\gamma_{\ell\ell'} \to \delta_{\ell\ell'}N(\ell)\ , \qquad \gamma_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \to \delta_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}N(\mathcal{O})\ . \tag{20.3.4}$$

ここで, $N(\mathcal{O})$ は演算子 $\mathcal{O}$ の次元であり, $N(\ell)$ は場の集合 ℓ の全次元 (スカラー場と質量の無いゲージ場については $s=0$, ディラック場については $s=1/2$ 等として, それぞれの場について $s+1$ の和) だ. また, 次元解析により, $k^\mu = \kappa n^\mu$ として n^μ を固定すると, 振幅はフーリエ変換を定義するのに用いた積分から生じる $\kappa^{4-4n(\ell)}$ の因子を除いては, 比 κ/μ を通じてのみ κ に依存する. そのため, (20.3.2) の解は以下の形をとる.

$$U^{\ell}_{\mathcal{O}}(\kappa n) = \kappa^{4-4n(\ell)}\sum_{\ell',\mathcal{O}'}\left[M\left\{\exp\left(\int^{\kappa}\frac{d\mu}{\mu}\gamma(g_\mu)\right)\right\}\right]_{\ell,\ell'}\mathcal{U}^{\ell'}_{\mathcal{O}'}(g_\kappa, n)$$
$$\times\left[M\left\{\exp\left(\int^{\kappa}\frac{d\mu}{\mu}\gamma(g_\mu)\right)\right\}\right]^{-1}_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}\ . \tag{20.3.5}$$

ここで, M は 「μ 順序の」 積, つまり, 指数関数の展開の各項は, 左から右に μ が減る順に並び替えられたものだ.

これは $\mu \to \infty$ において g_μ が固定点 g_* に近づくとき, 特に簡単な結果を与える. その場合, $M\{\exp(\int^\kappa \gamma(g_\mu)d\mu/\mu)\}$ への大きな μ の寄与は, μ 順序のために左に現れる $\kappa^{\gamma(g_*)}$ の行列因子だ. したがって (20.3.5) は,

$$U^\ell_\mathcal{O}(\kappa n) = \kappa^{4-4n(\ell)} \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\kappa^{\gamma(g_*)}\right]_{\ell,\ell'} \mathcal{C}_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\kappa^{-\gamma(g_*)}\right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} \tag{20.3.6}$$

となる. ここで, $\mathcal{C}$ は定数または $\ln\kappa$ の冪の和であり, g_κ が g_* に近づく速さに依存する.

量子色力学のように漸近的に自由な理論は, 特に物理的に興味のある特別な場合だ. ここでは, 固定点は $g_* = 0$ にあり, (20.3.4) によれば, この点の近くでは γ 行列は,

$$\gamma(g)_{\ell\ell'} \to N(\ell)\delta_{\ell\ell'} + g^2\, c_{\ell\ell'}\ , \quad \gamma(g)_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \to N(\mathcal{O})\delta_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + g^2\, c_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \tag{20.3.7}$$

と振舞う. また, もし結合定数に対するくりこみ群方程式を,

$$\mu\frac{d}{d\mu}g^2_\mu = -\frac{b}{8\pi^2}g^4_\mu \tag{20.3.8}$$

という形に書くと,

$$\int^\kappa \frac{d\mu}{\mu}g^2_\mu \to -\frac{8\pi^2}{b}\ln g^2_\kappa + \text{定数}$$

となる. これを (20.3.5) に使うと, 以下の漸近的振舞いを得る.

$$\begin{aligned} U^\ell_\mathcal{O}(\kappa n) \to & \kappa^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N(\mathcal{O})} \\ & \times \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\left(g^2_\kappa\right)^{-8\pi^2 c/b}\right]_{\ell,\ell'} C^{\ell'}_{\mathcal{O}'} \left[\left(g^2_\kappa\right)^{8\pi^2 c/b}\right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}\,. \end{aligned} \tag{20.3.9}$$

ここで, $\mathcal{C}^{\ell'}_{\mathcal{O}'}$ は定数行列で, $\mathcal{U}^{\ell'}_{\mathcal{O}'}(0,n)$ に定数因子をかけたものだ. この定数因子は, (20.3.5) の積分で g_μ がそれほど小さくないところから

くるために, 摂動論では計算できない. $\kappa \to \infty$ では, 結合定数の振舞いは $g_\kappa^2 \to 8\pi^2/b\ln\kappa$ であり, (20.3.9) は,

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(\kappa n) \to \kappa^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N(\mathcal{O})} \times \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\Big(\ln\kappa\Big)^{8\pi^2 c/b}\right]_{\ell,\ell'} \mathcal{B}_{\mathcal{O}'}^{\ell'} \left[\Big(\ln\kappa\Big)^{-8\pi^2 c/b}\right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} \tag{20.3.10}$$

とも書ける. ここで, $\mathcal{B}_{\mathcal{O}'}^{\ell'}$ は別の定数行列だ. (20.3.9) と (20.3.10) が正しい条件は $g_\kappa^2/8\pi^2 \ll 1$ だが, c 行列の固有ベクトルのうち一つだけが漸近的振舞いに寄与するほど $\ln\kappa$ が大きい必要はない. (20.3.10) は20.6節で深非弾性散乱を調べるときに用いる.

20.4 係数関数の対称性

基本理論の対称性が部分的にあるいは完全に自発的に破れていても, 係数関数が理論の対称性を全て持っているために, 演算子積は非常に有用となっている.[4] これを証明するために, くりこまれた演算子 $\mathcal{O}_i(x)$ の積の演算子積展開を考える. これらの演算子は, 保存カレント $J^\mu(x)$ を持つある対称性のもとで以下のように線形に変換するとする.

$$[J^0(\mathbf{x},t), \mathcal{O}_i(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \sum_j t_{ij}\mathcal{O}_j(\mathbf{y},t) \, . \tag{20.4.1}$$

ここで t_{ij} は定数行列だ. 演算子積展開は, $x_1, \cdots x_n$ が x に揃って (つまり, $x_1 - x, \cdots x_n - x$ の比が全て固定されたまま) 近づくとき,

$$\langle\beta|T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\}|\alpha\rangle \to \sum_i U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1 - x, \cdots x_n - x) \times \langle\beta|\mathcal{O}_i(x)|\alpha\rangle \tag{20.4.2}$$

だというようにもかける. さて, カレント J^μ を持つ対称性が自発的に破れて, 対応するゴールドストン・ボゾン π が以下を満たすとする.

$$\langle \mathrm{VAC}|J^\mu(0)|\pi\rangle = \frac{F p_\pi^\mu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}} \,. \tag{20.4.3}$$

すると, 19.2 節で見たように, 低エネルギーのゴールドストン・ボゾンを一つ余分に持つ状態との間の演算子積の行列要素は,

$$\begin{aligned}\langle\beta|T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\}|\pi\alpha\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}F} \\ &\times \int d^4x\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle\beta|T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\,J^\mu(x)\}|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{20.4.4}$$

となる. これは, (20.4.4) の右辺の積分において, ゴールドストンの極の項のみが生き残るからだ. (20.4.1) とカレントの保存則を使うと, これは以下の形に書ける.

$$\begin{aligned}\langle\beta|T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\}|\pi\alpha\rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}F} \\ &\times \sum_{r=1}^{n}\sum_{j_r} t_{i_r j_r}\langle\beta|T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{j_r}(x_r)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\}|\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{20.4.5}$$

さて, この表式の両辺に演算子積展開を適用する. $x_1\cdots x_n$ が全て揃って x に近づく極限では以下を得る.

$$\begin{aligned}\sum_i U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1-x,\cdots x_n-x)\langle\beta|\mathcal{O}_i(x)|\pi\alpha\rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}F} \\ \times \sum_{r=1}^{n}\sum_{j_r}\sum_i t_{i_r j_r}\, U_i^{i_1\cdots j_r\cdots i_n}&(x_1-x,\cdots x_n-x) \\ &\times\langle\beta|\mathcal{O}_i(x)|\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{20.4.6}$$

また, (20.4.5) の特別な場合として,

$$\langle\beta|\mathcal{O}_i(x)|\pi\alpha\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}F}\sum_j t_{ij}\langle\beta|\mathcal{O}_j(x)|\alpha\rangle \qquad (20.4.7)$$

が成立する. これらは全て, 任意の状態 $\langle\beta|$ と $|\alpha\rangle$ について成り立つから, (20.4.6) の両辺の $\langle\beta|\mathcal{O}_j(x)|\alpha\rangle$ の係数は等しくなければならない. したがって,

$$\begin{aligned}0 =& -\sum_i t_{ij}U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1-x,\cdots x_n-x)\\ &+\sum_{r=1}^{n}\sum_{j_r} t_{i_r j_r}\,U_j^{i_1\cdots j_r\cdots i_n}(x_1-x,\cdots x_n-x)\end{aligned} \qquad (20.4.8)$$

となる. これは$U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1-x,\cdots x_n-x)$ が t によって生成される対称性のもとで不変であることを意味する. ただし, この対称性が下の添字に働くときは, 行列 t が $-t^{\mathrm{T}}$ で置きかえられるという意味で, 上の添字に働くときに対して反傾的だ. これは, J^μ で生成される対称性が自発的に破れていないとしたときに期待されるものと同じ関係式だ.

20.5 スペクトル関数の和則

スペクトル関数の和則とは各種のカレントのスペクトル関数についての拘束条件だ.[5] ここでは, ローレンツの4元ベクトルになっている以外は任意のカレント J_a^μ の集合から話を始め, 後により特別な場合を考察する. それらのスペクトル関数を定義するために, ローレンツ不変性を使って, 以下を書き下す.

$$\begin{aligned}&\sum_N \delta^4(p-p_N)\langle\mathrm{VAC}|J_\alpha^\mu(0)|N\rangle\langle\mathrm{VAC}|J_\beta^\nu(0)|N\rangle^* = (2\pi)^{-3}\theta(p^0)\\ &\times\left[\left(\eta^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/p^2\right)\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(-p^2)+p^\mu p^\nu\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2)\right] .\end{aligned} \qquad (20.5.1)$$

これは (19.2.19) と (19.2.20) もしくは (10.7.4) に類似のものだ. 状態 $|N\rangle$ の完全性を使い, フーリエ変換をすると, これは以下のように書かれる.

$$\langle J^\mu_\alpha(x)\, J^\nu_\beta(0)\rangle_{\rm VAC} = \int d\mu^2 \\ \times \left[\eta^{\mu\nu}\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2) - \left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2) + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)/\mu^2\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] \\ \times \Delta_+(x;\mu^2)\,. \tag{20.5.2}$$

ここで, $\Delta_+(x;\mu^2)$ は (5.2.7) で定義される関数だ.

$$\Delta_+(x;\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^0)\,\delta(p^2+\mu^2)e^{ip\cdot x}\,. \tag{20.5.3}$$

カレントがエルミート演算子に選ばれていると仮定すると, (20.5.1) からすぐに $\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)$ と $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)$ が正のエルミート行列だとわかる. また, x^μ を空間的にとって (このとき $\Delta_+(x)$ は遇) , (20.5.2) で並進不変性と因果律を使うと, $\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)$ と $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)$ はまた対称であることもわかる.

さて, $x^2>0$ で $x\to 0$ では, 関数 $\Delta_+(x;\mu^2)$ は γ をオイラー定数として,

$$\Delta_+(x;\mu^2) \to \frac{1}{4\pi^2x^2} + \frac{\mu^2}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\gamma\mu\sqrt{x^2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + O(x^2) \tag{20.5.4}$$

と振舞う. したがって, $J^\mu_\alpha(x)\,J^\nu_\beta(0)$ の展開の真空期待値の最初の数項は, 以下の通りとなる.

$$\langle J^\mu_\alpha(x)\, J^\nu_\beta(0)\rangle_{\rm VAC} \\ \to -\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - \frac{4x_\mu x_\nu}{(x^2)^3}\right]\int d\mu^2\left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2) + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)/\mu^2\right) \\ -\frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi^2x^2}\int d\mu^2\,\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\mu^2 + \frac{x_\mu x_\nu}{2\pi^2(x^2)^2}\int d\mu^2\left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\mu^2 + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\right) \\ +O(\ln x^2)\,. \tag{20.5.5}$$

したがって，もし2点関数のなんらかの線形結合 $\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\langle J^\mu_\alpha(x) J^\nu_\beta(0)\rangle_{\rm VAC}$ が $x\to 0$ において特異性を持っていて，それが $1/x^4$ の次数より弱いと示すことができれば，

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\int d\mu^2\left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)+\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)/\mu^2\right)=0 \tag{20.5.6}$$

となる. また, もしその特異性がさらに $1/x^2$ より弱ければ,

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\int d\mu^2\ \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)=0\ , \tag{20.5.7}$$

および,

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\int d\mu^2\ \rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\mu^2=0 \tag{20.5.8}$$

となる. (20.5.6), (20.5.7), (20.5.8) はそれぞれ, スペクトル関数の第1, 第2, 第3の和則として知られている.

これが最も興味のある場合にどのように働くかを見てみよう. それは, $J^\mu_\alpha(x)$ が量子色力学のような理論の保存カレントの場合だ. カレントの保存則から, (20.5.1) は p_μ と縮約をとると消える. したがって, $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^2)$ は $\delta(-p^2)$ に比例していなければならないから, 任意の $c_{\alpha\beta}$ について自動的にスペクトル関数の第3種の和則 (20.5.8) を満たす. $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^2)\propto\delta(-p^2)$ については, それが (20.5.1) の状態についての和において $|B_a\rangle$ の項からのみ寄与を受ける. この状態は, ゼロ・スピンの単一の質量ゼロ粒子 B_a からなるが, この粒子は実質上, ゴールドストン・ボゾンだ. このような1粒子状態については, ローレンツ不変性から,

$$\langle{\rm VAC}|J^\mu_\alpha(0)|B_a\rangle=\frac{iF_{\alpha a}\,p^\mu_B}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0_B}} \tag{20.5.9}$$

となる. $\delta(p^0-|\mathbf{p}|)/2p^0=\theta(p^0)\delta(-p^2)$ という関係を使うと,

$$\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^2)=\delta(-p^2)\sum_a F_{\alpha a}F^*_{\beta a} \tag{20.5.10}$$

を得る. 対照的に, $\rho^{(1)}_{\alpha\beta}(-p^2)$ は $-p^2>0$ でのみゼロでない.

より特定の例を扱うために, くりこみ可能で漸近的自由なゲージ理論のおいて, N 個のスピン 1/2 の質量ゼロ (もしくは, ほとんどゼロ) のフェルミオンがゲージ群の同じ表現に属している場合を考える. 量子色力学は, u, d, s クォークの質量を無視すれば $N=3$, また, u,d の質量を無視すれば $N=2$ として, この描像に当てはまる. 19章で見たように, そのような理論には大域的 $SU(N)\times SU(N)$ 対称性*が存在する. この対称性は軽いフェルミオン場の右手と左手部分を, それぞれ $(N,1)$ と $(1,N)$ 表現として変換する. ここで, 「N」と「1」はそれぞれ, $SU(N)$ の基本表現と単位表現を意味する. 左手と右手の $SU(N)$ 対称性のカレントは,

$$J^{\mu}_{La}(x)=-i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\lambda_a\psi(x)\ ,$$
$$J^{\mu}_{Ra}(x)=-i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\lambda_a\psi(x) \tag{20.5.11}$$

で与えられる. ここで, λ_a は $N=3$ のときの (19.7.2) のように, N 個の軽いクォークを区別する「フレーバー」の添字に働くトレースがゼロのエルミート行列の完全系をなす. これらのカレントは (質量の冪で) 次元 +3 を持ち, 二つのカレントの積の展開 (20.3.6) における次元 $d(\mathcal{O})$ の演算子 $\mathcal{O}$ の係数は, それらの座標の間隔 x がゼロに近づくにつれて, (対数を除いて) $x^{-6+d(\mathcal{O})}$ の次数の特異性を持つと考えられる. したがって, もしカレントの積の線形結合の展開が単位演算子を含めば, 対応するスペクトル関数の線形結合は x^{-6} のように振舞う. したがって, 一般にスペクトル関数の第1の和則も第2の和則も満たさない. この展開の真空期待値の最低次の演算子が微分をゼロ個ま

---

*さらに, $U(1)$ 対称性もあるが, これは軽いフェルミオン場の右手と左手部分の両方に同じように働くという意味でベクトル的だ. これは単に軽いクォーク数の保存則であり, 今の問題には関係が無い. ラグランジアンにはさらに, 軽いフェルミオン場の右手と左手の部分に異なるように働く軸性 $U(1)$ 対称性があるが, これは23.5節で論じるように量子効果で破れる.

たは1個しか持たないフェルミオンの2次形式なら, スペクトル関数の対応する線形結合はx^{-3} か x^{-2} のように振舞い, したがって, スペクトル関数の第1の和則は満たすが, 一般的には第2の和則は満たさない. また, この展開の真空期待値の最低次の演算子が2つ以上の微分を含むフェルミオンの2次形式か, フェルミオンの4次形式ならば, 対応するスペクトル関数の線形結合は x^{-2} よりも特異性は弱く, したがって, スペクトル関数の第1と第2の和則を満たす.

2つのカレントの積の展開にどの演算子が現れるかを知るには, 積に含まれる $SU(N)\times SU(N)$ の表現を分類する必要がある. また, これらの演算子の真空期待値がゼロでないかどうかを知るには, 自発的に破れていない $SU(N)\times SU(N)$ の部分群のもとでどれが不変であるかを問わなければならない. これらの質問に答えるには, カレント $J^{\mu}_{La}(x)$ と $J^{\mu}_{Ra}(x)$ は$SU(N)\times SU(N)$ のもとで, それぞれ, $SU(N)\times SU(N)$ の $(A,1)$ 表現と $(1,A)$ 表現として変換することに注意する. ここで, A と 1 は $SU(N)$ の随伴表現と単位表現を意味する.

ここで, $SU(N)\times SU(N)$ の自発的に破れていない部分群はベクトル的な $SU(N)_V$ であって, そのカレントは $J^{\mu}_{La}(x)+J^{\mu}_{Ra}(x)$ であるとする. これは, 量子色力学と (19.9節で見たように) 他の広い種類の理論でも成立している. また, パリティ保存は自発的には破れていないとする. これらの破れていない対称性の結果,

$$\rho^{(1)}_{La,Lb}(\mu^2)=\rho^{(1)}_{Ra,Rb}(\mu^2)=\delta_{ab}\left[\rho^{(1)}_V(\mu^2)+\rho^{(1)}_A(\mu^2)\right] \tag{20.5.12}$$

と,

$$\rho^{(1)}_{La,Rb}(\mu^2)=\rho^{(1)}_{Ra,Lb}(\mu^2)=\delta_{ab}\left[\rho^{(1)}_V(\mu^2)-\rho^{(1)}_A(\mu^2)\right] \tag{20.5.13}$$

が成立する. ここで, $\delta_{ab}\rho^{(1)}_V(\mu^2)$ と $\delta_{ab}\rho^{(1)}_A(\mu^2)$ はそれぞれ生成子 λ_a と $\lambda_a\gamma_5$ を持つ以下のカレントについて (20.5.2) から定義されるスペ

クトル関数だ.

$$J^{\mu}_{Va} = -i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\lambda_a\psi \,, \qquad J^{\mu}_{Aa} = -i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\lambda_a\psi \,. \tag{20.5.14}$$

また,

$$F_{La\,b} = -F_{Ra\,b} = \delta_{ab}F \,, \tag{20.5.15}$$

ただし, (20.5.9) は,

$$\langle \mathrm{VAC}|J^{\mu}_{Aa}(0)|B_b\rangle = \frac{iF\delta_{ab}\,p^{\mu}_B}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0_B}} \tag{20.5.16}$$

となるので, (20.5.10) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\rho^{(0)}_{La\ Lb}(\mu^2) &= \rho^{(0)}_{Ra\ Rb}(\mu^2) = -\rho^{(0)}_{La\ Rb}(\mu^2) \\ &= -\rho^{(0)}_{Ra\ Lb}(\mu^2) = F^2\delta(\mu^2)\delta_{ab} \,.\end{aligned} \tag{20.5.17}$$

カレントの積では, カイラリティが同じ場合と異なる場合を別に考えるのが便利だ.

カイラリティが同じ場合: 積 $J^{\mu}_{La}(x)J^{\nu}_{Lb}(0)$ と $J^{\mu}_{Ra}(x)J^{\nu}_{Rb}(0)$ は, $SU(N)\times SU(N)$ のもとで, それぞれ $(A\times A, 1)$ 表現と $(1, A\times A)$ 表現として変換する. ここで A と 1 はそれぞれ随伴表現と単位表現のことだ. 任意の群において $A\times A$ は単位表現を含むから, 単位演算子はこれらの積の展開に登場し, その係数は δ_{ab} に比例する. したがって, 演算子積のトレースがゼロの部分のみがスペクトル関数の和則を満たすことができる. しかし, すでに見たように, スペクトル関数はトレースがゼロの部分を含まないので, カイラリティが同じスペクトル関数はどの和則も満たすことができない.

カイラリティが異なる場合: 積 $J^{\mu}_{La}(x)J^{\nu}_{Rb}(0)$ と $J^{\mu}_{Ra}(x)J^{\nu}_{Lb}(0)$ は双方ともに $SU(N)\times SU(N)$ の (A, A) 表現のように変換する. 単位演算子 (と, $F_{\alpha\mu\nu}F^{\mu\nu}_{\alpha}$ のような演算子) はもちろん $SU(N)\times SU(N)$ の1重項であり, したがって, これらの積の展開には現れることができない.

$\bar{\psi}\psi$ のような微分のないフェルミオンの2次形式は $SU(N) \times SU(N)$ の $(\bar{N}, N)$ や $(N, \bar{N})$ 表現として変換するから，それらはカイラリティが異なるカレントの積の展開には現れることができない．微分を一つだけ持ちゲージ不変でローレンツ不変なフェルミオンの2次形式は，ゲージ共変微分 $\gamma^\mu D_\mu$ が ψ にかかるものだけだが，これは場の方程式によりゼロとなる．したがって，これらのスペクトル関数は第1と第2のスペクトル関数の和則を満たし，

$$\int d\mu^2 \ \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)\right] / \mu^2 = F^2 \tag{20.5.18}$$

と，

$$\int d\mu^2 \ \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)\right] = 0 \tag{20.5.19}$$

となる．

スペクトル関数の和則に関する原著[5] では，$SU(2) \times SU(2)$ のスペクトル関数は，μ が $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ については $m_\rho = 770$ MeV において，また $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ については未知の質量 m_A において鋭いピークを持つと仮定された．つまり，

$$\rho_V^{(1)}(\mu^2) \simeq g_\rho^2 \delta(\mu^2 - m_\rho^2)\ , \qquad \rho_A^{(1)}(\mu^2) \simeq g_A^2 \delta(\mu^2 - m_A^2)$$

だ．そうすると，(20.5.18) と (20.5.19) は，**

$$\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} - \frac{g_A^2}{m_A^2} = F_\pi^2$$

と，

$$g_\rho^2 = g_A^2$$

になる．未知の g_A を消去すると，これより，

$$g_\rho^2 = F_\pi^2 \left(\frac{1}{m_\rho^2} - \frac{1}{m_A^2} \right)^{-1}$$

** $SU(2)$ の生成子 λ_a をパウリ行列にとると，(19.7.2) のように $F = F_\pi = 184$ MeV を得る．

という表式が得られる．1967 年にこの結果は表式[6] $g_\rho^2 = 2F_\pi^2 m_\rho^2$ (この式の正当性は不明であったが，$\rho \to e^+ + e^-$ 崩壊率の実験的測定とは一致していた) と共に用いられ，

$$m_A = \sqrt{2} m_\rho$$

という結果が導かれた．質量が $\sqrt{2} m_\rho$ のあたりで軸性ベクトルと結合するのにふさわしい量子数(つまり, 1^+ と $T = 1$ と $\mathsf{C}(a_1^0) = +1$) を持つ a_1 共鳴が存在するかどうかは, 長年の間わからなかった．しかし, これらの量子数を持つ共鳴はいまや 1230 MeV $= 1.6\, m_\rho$ の質量にあると確証されている．今日では, 比 m_A/m_ρ を入力として，ある種の模型[7] から示唆される $\sqrt{2}$ という値か, 実験値 1.6 を使って，g_ρ を予言するほうが望ましいと思える.

1967 年以来, g_ρ のみならず量子色力学の $SU(3) \times SU(3)$ カレントのベクトルのスペクトル関数 $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ はすべて, 電磁カレントが $SU(3)$ カレントの線形結合である事実を利用して，$e^+ + e^- \to \gamma \to$ ハドロン過程の測定された断面積から, 広い範囲のエネルギーについてある程度正確に求められている．$SU(3) \times SU(3)$ の軸性ベクトルのスペクトル関数 $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ は原理的には $\bar{\nu} + e \to$ ハドロン過程で測定することができる．これは (20.5.14) のカレントの荷電成分が, レプトンが結合するハドロン・カレントと同じだからだ．しかし, 反ニュートリノ・電子散乱は実験的に調べられているものの, これらの反応率が低いために衝突ビームは使えず，標的電子は本質的に静止している．典型的なハドロンのエネルギー, たとえば重心系で 3 GeV に達するには, 実験室系でニュートリノのエネルギーが $(3\,\mathrm{GeV})^2/2m_e \simeq 10$ TeV に達する必要がある．この高エネルギーのニュートリノの高密度のビームを利用することは, たとえ可能だとしても当分難しいだろう．幸運にも $\tau \to \nu +$ ハドロン過程のスペクトル関数を調べることは可能になっている．しかし, ハドロンのエネルギーは $m_\tau = 1.7$ GeV を厳格な上

限としている. また, 有効カイラル・ラグランジアンを使って μ^2 が小さい場合のスペクトル関数を計算することも可能だ. また, 量子色力学を使って $\rho_V^{(1)} - \rho_A^{(1)}$ を μ^2 が大きく, この量自体が非常に小さいところで計算することも可能だ. 1993 年のドナヒュー (Donoghue) とゴロビッチ (Golowich) によるこれら全部を考慮した注意深い解析[8] によれば, スペクトル関数の積分には実際に ρ 共鳴と a_1 共鳴が主要な寄与をし, スペクトル関数の第1と第2の和則と矛盾無い結果が得られている.

20.6　深非弾性散乱

レプトン・核子の深非弾性散乱の解析は, くりこみ群と演算子積展開のもっとも重要な応用の一つだ. まず, これらの反応の初期の現象論的模型を概観した後, 演算子積展開がいかにこれらの模型を正当化し, さらにそれらに対する補正を与えるかを見る.

4元運動量 k の電子が4元運動量 p の核子 N と衝突し, 4元運動量 k' の電子と一般的なハドロン状態 H を生成する過程を考える. このハドロン状態 H は観測しないので, それについて和をとる. スピンについて平均した包含断面積を計算するには, 以下の量を知る必要がある.

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{\sigma_N}\sum_H \delta^4(p_H - p - q)\langle H|J^\mu(0)|N\rangle \times\langle H|J^\nu(0)|N\rangle^* . \tag{20.6.1}$$

ここで, J^μ は電磁カレント (ここでは, それを e の因子で割ったもの), また $q = k - k'$ は電子からハドロンへの移行運動量だ. ローレンツ不変性から $W^{\mu\nu}(q,p)$ は $p^\mu p^\nu$, $p^\mu q^\nu$, $q^\mu p^\nu$, $q^\mu q^\nu$, $\eta^{\mu\nu}$ の線形結合だ. また, その係数は q と p の二つの独立なスカラー関数である q^2 と $\nu \equiv -q\cdot p/m_N$ のみに依存できる. カレントの保存則から

$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$ だから, W は以下の形をとらなければならない.*

$$W^{\mu\nu}(q,p) = -\Big(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\Big) W_1(\nu, q^2)$$
$$+\frac{1}{m_N^2}\Big(p^\mu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\mu\Big)\Big(p^\nu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\nu\Big) W_2(\nu, q^2)\ . \quad (20.6.2)$$

また, (20.6.1) から $W^{\mu\nu *} = W^{\nu\mu}$ だから, W_1 と W_2 は実だ. また, $W^{\mu\nu}$ は正行列だから W_1 と W_2 は正だ. 核子の静止系での微分断面積は,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm MOTT} \big(W_2 + 2W_1 \tan^2(\theta/2)\big) \quad (20.6.3)$$

で与えられる. ここで, $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ は電子が散乱される立体角, $(d\sigma/d\Omega)_{\rm MOTT}$ はスピン・ゼロの点状粒子による相対論的弾性散乱の微分断面積で, $E_e = -k\cdot p/m_N$ を核子の静止系での入射電子エネルギーとして, 以下で与えられる.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm MOTT} = \frac{e^4}{4E_e^2}\,\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\ . \quad (20.6.4)$$

$-p_H^2 = -q^2 + 2m_N\nu + m_N^2$ が固定された値のとき微分断面積は, 核子が $-p_H^2$ に近い質量を持つ何らかの粒子や共鳴状態へ遷移する形状因子の二乗に比例していて, $q^2 \to \infty$ のとき非常に早く減少すると思われる. そのため, スタンフォード線形加速器研究所 (SLAC) の 1966 年の開所後 2 年で, フリードマン (Friedman), ケンダール (Kendall), テイラー (Taylor) が率いる SLAC–MIT 共同研究グループが実際は $\nu W_2(q^2, \nu)$ は $\omega \equiv 2m_N\nu/q^2 > 1$ が固定されたときに q^2 についてほぼ定数だという事実を発見した[9]ときは, 多少驚きであった. (より正

---

*同じ形式が $\nu_\mu + p \to \mu^- + H$ のような他の深非弾性レプトン散乱にも使える. ただ, これらの過程ではパリティが保存されないので, $W^{\mu\nu}(q,p)$ には $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma$ に比例する項が付け加わる. 簡単にするために, ここでは深非弾性電子散乱に話を限っている.

確に言うと，陽子の $W_2(q^2,\nu)$ は $E_e = 10$, 13.5, 16 GeV, で $\theta = 6°$, 10° では $\nu W_2(q^2,\nu) \simeq 0.35 - 0.004\omega$ という関数で良く近似されることがわかった. これらの実験は, $\tan^2(10°/2) = 7.6 \times 10^{-3}$ なので, W_1 には影響されない.) この極限では $-p_H^2 \to (\omega - 1)q^2 \to \infty$ であることに注意しよう. このために, これは「深非弾性」散乱と呼ばれる.

ほぼ同じころ，ブヨルケン (Bjorken)[10] はカレント代数を使って，$W_2(q^2,\nu)$ と $W_1(q^2,\nu)$ があるスケール法則を満たすと論じた. それは, q^2 と ν が共に無限大に行くとき, 以前と同様に $\omega \equiv 2m_N\nu/q^2$ として, 以下で表される.

$$\nu W_2(\nu,q^2) \to F_2(\omega)\ , \qquad W_1(\nu,q^2) \to F_1(\omega)\ . \tag{20.6.5}$$

少し後にファインマン[11] はより直感的な説明を与えた. 彼は，非常に相対論的な核子の深非弾性散乱では, 核子はあたかも各種の**パートン** (parton) からできているように振舞うとした. このパートンには i という添字を与え，核子の運動量を $\mathbf{p}$ としてそれぞれのパートンの運動量が $x\mathbf{p}$ と $(x+dx)\mathbf{p}$ との間にある確率は $\mathcal{F}_i(x)dx$ で与えられるとする. すると, 各 i について,

$$\int_0^1 dx\ \mathcal{F}_i(x) = 1 \tag{20.6.6}$$

が成立する. 核子の全運動量が $\mathbf{p}$ であるという条件から，次の和則が導かれる.

$$\int_0^1 \sum_i \mathcal{F}_i(x)\, x\, dx = 1\ . \tag{20.6.7}$$

4元運動量 xp のパートンからの電子弾性散乱 (で m_e を無視すると) については $x^2m_N^2 = -(q + xp)^2 = -q^2 - 2\nu m_N x + x^2m_N^2$ だから, $\nu = q^2/2m_N x$ となる. したがって, この模型の非弾性散乱断面積は以

下となる.**

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{MOTT}} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \mathcal{F}_i(x) \left(1 + \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times\delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) . \tag{20.6.8}$$

ここで Q_i は e を単位として計った i 種のパートンの電荷だ. (ここの $\tan^2(\theta/2)$ 項は $eQ_i/2m_N x$ の磁気モーメントを持つ「ディラック」パートンに適切なものだ.) これを (20.6.3) と比較して以下を得る.

$$W_2(\nu, q^2) = \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx\, \mathcal{F}_i(x) \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) = \frac{1}{\nu\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{20.6.9}$$

$$\begin{aligned} W_1(\nu, q^2) &= \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx\, \mathcal{F}_i(x) \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) \\ &= \frac{\omega\nu}{2m_N} W_2(\nu, q^2) . \end{aligned} \tag{20.6.10}$$

これは,

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{20.6.11}$$

と,

$$F_1(\omega) = (\omega/2m_N) F_2(\omega) \tag{20.6.12}$$

としてブヨルケンのスケーリング則 (20.6.5) に一致する. (20.6.12) はキャラン (Callan) とグロス (Gross) によって最初に導かれた.[12] これは実験と約 10–15%の範囲で一致する.

** これは4元運動量 p で質量が m のスピン 1/2 粒子のコンプトン散乱の一般的なローレンツ系での表式 (8.7.7) と (8.7.38) から導くことができる. このためには, これらの表式を導くのに用いたゲージでは初期と終期の実偏極ベクトル e_μ と e'_μ が $e^2 = e'^2 = 1$, $e \cdot p = e' \cdot p = e \cdot k = e' \cdot k' = 0$ を満たし, 偏極についての和は以下を与えることに注意するのが有用だ.

$$\sum_{e,e'} \left(e \cdot e'\right)^2 = 2 + \frac{m^4 (k \cdot k')^2}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} + \frac{2m^2 (k \cdot k')}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} .$$

陽子と中性子がそれぞれ, 二つの u と一つの d, 一つの u と二つの d, および任意個数の中性のパートンからなるという仮定に基づくと, (20.6.11) と (20.6.6) は以下の W_2 についての和則を与える.

$$\int_1^\infty F_2(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1 & p \\ 2/3 & n\,. \end{cases} \tag{20.6.13}$$

この積分は ω が大きいところから大きな寄与を受けるが, そこでは F_2 は測定が難しい. また, 核子の全運動量は三つのクォークが等しく担っている (また中性パートンは運動量を担っていない) とすると, (20.6.7) の代りに, 各クォークについて $\int \mathcal{F}_i(x)x\,dx = 1/3$ というより強い関係式が得られる. これを (20.6.11) と共に使うと, 以下を得る.

$$\int_1^\infty F_2(\omega)\frac{d\omega}{\omega^2} = \tfrac{1}{3}\sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1/3 & p \\ 2/9 & n\,. \end{cases}$$

この積分は測定するのがより簡単で, 和則とひどくずれることがわかる. これは核子の運動量の多くの部分が中性パートンによって担われていることを示している.

上の現象論はどれも, 特定の場の理論に依存してはいない. 基礎にある場の理論を深非弾性散乱に用いる方法を最終的に与えるのは演算子積展開だ. 特に, 演算子積展開は (20.6.5) のスケール仮定を説明する (また, さらにスケーリングへの補正を計算する) のに漸近的自由な場の理論が必要であることを明らかにした. この漸近的自由な場の理論は, つまるところ量子色力学で与えられた.

演算子積展開を深非弾性散乱に用いるには, まず (20.6.1) をフーリエ変換する. 並進不変性とハドロン状態 $|H\rangle$ の完全性を用いると,

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4}\sum_{\sigma_N}\int d^4z\; e^{-iq\cdot z}\langle N|J^\nu(z)\,J^\mu(0)|N\rangle \tag{20.6.14}$$

となる. $q\to\infty$ での $W^{\mu\nu}(q,p)$ の漸近的振舞いは, この関係式により演算子積の $z\to 0$ における特異性と関係する.

演算子積展開の係数関数のファインマン・ダイアグラムの計算は, $W^{\mu\nu}$ についての (20.6.14) に現れるような行列要素の展開に直接関係するのではなく, 以下の2点グリーン関数の行列要素に関係している.

$$(m_N/p_N^0)T^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4}\sum_{\sigma_N}\int d^4z\, e^{-iq\cdot z} \times\langle N|T\left\{J^\nu(z),\, J^\mu(0)\right\}|N\rangle\,. \quad (20.6.15)$$

これを (20.6.2) と同じように定義される $T^{\mu\nu}$ の構造関数を使って表すことができる.

$$T^{\mu\nu}(q,p) = -\Big(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\Big)T_1(\nu,q^2) + \frac{1}{m_N^2}\Big(p^\mu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\mu\Big)\Big(p^\nu - \frac{p\cdot q}{q^2}q^\nu\Big)T_2(\nu,q^2)\,. \quad (20.6.16)$$

$T_r(\nu,q^2)$ と $W_r(\nu,q^2)$ $(r=1,2)$ の関係は q^2 を固定した分散関係† で与えられる.[13]

$$T_r(\nu,q^2) = \frac{1}{2}W_r(-\nu,q^2) + \frac{1}{2}W_r(\nu,q^2) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu'\,\frac{W_r(-\nu',q^2) - W_r(\nu',q^2)}{\nu'-\nu}\,. \quad (20.6.17)$$

ここで, 被積分関数の分母は主値関数として解釈する. 関数 $W_r(\nu,q^2)$ は $\nu > q^2/2m_N$ を除いてはゼロとなるから, 分散関係は以下のように書き換えることができる.

$$T_r(\nu,q^2) = \frac{1}{2}W_r(-\nu,q^2) + \frac{1}{2}W_r(\nu,q^2) - \frac{1}{2\pi i}\int_{q^2/2m_N}^{\infty} d\nu'\,W_r(\nu',q^2)\left(\frac{1}{\nu'+\nu} + \frac{1}{\nu'-\nu}\right)\,. \quad (20.6.18)$$

† $q^2=0$ では, これらは光子の前方散乱の分散式 (10.8.16) の導出と全く同じように導くことができる. $q^2\neq 0$ が固定されているときはより難しい.

T_r の演算子積展開に寄与する演算子は, それが属するローレンツ群の既約表現にしたがって分類することができる. $p^2 = -m_N^2$ が固定されている4元ベクトル p^μ だけのローレンツ共変な関数は, 対称テンソル $p^{\mu_1} \cdots p^{\mu_s}$ に比例している. したがって, スピンについて平均した核子の期待値に寄与できる唯一の演算子は対称でトレースがゼロのテンソル $\mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \cdots \mu_s}$ だ. ここで, 添字 i はこのテンソル構造を持つ演算子の異なるものを区別する. (ここでは, 後で明らかになる理由によりパートン模型でパートンの種類の添字として用いたのと同じ i を, 演算子を区別するのに使う.) これらの演算子は,

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma_N}\langle N|\mathcal{O}_{si}^{\mu_1\cdots\mu_s}|N\rangle = (m_N/p_N^0)\Big[p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_s} - [\text{トレース}]\Big]\langle\mathcal{O}_{si}\rangle \tag{20.6.19}$$

の形の行列要素を持つ. ここで $\langle\mathcal{O}_{si}\rangle$ は定数係数だ. そのような演算子は, $T^{\mu\nu}(q,p)$ に4元ベクトル p の s 因子に比例する寄与をする. したがって, $T_1(\nu,q^2)$ と $T_2(\nu,q^2)$ にはそれぞれ, ν^s と ν^{s-2} に比例する寄与をする. (p^2 を含む項は落としている. これは, そのような項は m_N^2/q^2 か $m_N^2/p\cdot q$ の因子で押さえられるからだ.) もし対数的補正を無視すれば, 漸近的自由な理論では係数の q^2 依存性はそれぞれ, $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s)/2}$ と $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s+2)/2}$ という形となる. ここで $d(s,i)$ は演算子 $\mathcal{O}_{si}$ の次元だ.†† $\nu \propto q^2\omega$ を使うと, 演算子 $\mathcal{O}_{si}$ の構造関数への寄与は漸近的に,

$$T_{1,si} \propto \nu^s (q^2)^{(2-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^s (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2} \tag{20.6.20}$$

と

$$\nu T_{2,si} \propto \nu^{s-1}(q^2)^{(4-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^{s-1}(q^2)^{(2-\tau(s,i))/2} \tag{20.6.21}$$

---

††指数の -4 は (20.6.14) の z 積分から生じ, また, 指数の $+6$ は二つの電磁カレント演算子の次元から生じる. $-s/2$ と $-(s-2)/2$ の項は ν^s と ν^{s-2} にある q^μ の冪を相殺する役割を持つ.

となることがわかる. ここで, $\tau(s,i)$ は演算子 $\mathcal{O}_{si}$ の**ツイスト** (twist)[14] であり, 以下で定義される.

$$\tau(s,i) \equiv d(s,i) - s\ . \tag{20.6.22}$$

ω を固定して $q^2 \to \infty$ としたときの T_1 と νT_2 への主要な寄与はツイストが最小の演算子から得られることがわかる. また (20.6.18) より, $T_r(\nu, q^2)$ には ν について奇数次の項はないので, これに寄与できる演算子 $\mathcal{O}_{si}$ は s が偶数のものだけだ.

対称でトレースがゼロでランクが s のテンソルで, 最低の次元を持つ演算子は,

$$\left(\mathcal{O}_{sf}\right)_{\mu_1\cdots\mu_s} \equiv (i^{s-2}/s!)\,\bar{\psi}_f\gamma_{\{\mu_1}\overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_2}\cdots\overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_s\}}\psi_f \tag{20.6.23}$$

と

$$\left(\mathcal{O}_{s0}\right)_{\mu_1\cdots\mu_s} \equiv (i^{s-2}/2s!)\,F_{\alpha\ \nu\{\mu_1}\overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_3}\cdots\overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_s}F^{\nu}_{\ \alpha\ \mu_2\}} \tag{20.6.24}$$

だ. ここで, f はクォークのフレーバーの添字, D_μ はゲージ共変微分だ. そして, 括弧はそれにくくられた時空の添字に対して, 置換について和をとり, トレース項を差し引くことを意味している. (記号 $\leftrightarrow$ は右と左に働く微分の差の半分を意味する. 同じ4元運動量を持つ状態の間の行列要素では微分の和が必ずゼロとなるために, この微分の差をとる.) これらの演算子の次元は $3+(s-1) = 4+(s-2) = 2+s$ だから, それらは全てツイスト $\tau = 2$ だ. したがって, $q^2 \to \infty$ では無限個の演算子が寄与し, どれも T_1 と νT_2 に, ω に依存し q^2 には対数的にのみ依存する寄与を与える. このように, 漸近的自由性はブヨルケン・スケール則を対数項を除いて保障する. ツイスト2の演算子のみを取り入れると, (われわれの記法から期待されるように) 各 s について, パートンの一種類あたり一つの演算子があり, i はクォークの種類 f (クォークと反クォークをまとめている) またはグルーオンでは $i = 0$ のどれかの値をとる.

さて対数的補正を考えよう. 漸近的自由な理論の係数関数の漸近的振舞いは (20.3.9) で決まる. 10.4節で論じたように, 電磁輻射補正を無視すると, 電磁カレントは保存するためにくりこみ因子は不必要だ. したがって (20.3.9) の行列 $c_{\ell\ell'}$ はゼロとなる. 行列 $c_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}$ はローレンツ変換性が異なる演算子を結びつける要素を持たないので, ここで使っている記法では $c_{si,s'i'}=\delta_{ss'}c_{ii'}(s)$ となる. したがって (20.3.9) は以下の形をとる.

$$T_1(\nu,q^2)\to\sum_{sij}\omega^s\mathcal{A}_{si}\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle\,, \qquad (20.6.25)$$

$$\nu T_2(\nu,q^2)\to\sum_{sij}\omega^{s-1}\mathcal{B}_{si}\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle\,. \qquad (20.6.26)$$

ここで, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は二つの電磁カレントの積の演算子積展開のなかの演算子 $\mathcal{O}_{si}$ の係数関数に現れる定数, ℓ^2 は係数関数を定義するために選んだ q^2 の特定の値, b は強い相互作用の結合定数 g_q の1ループくりこみ群方程式 (20.3.8) の定数, そして, $\langle\mathcal{O}_{si}\rangle$ は行列要素 (20.6.19) の定数係数だ.

演算子積展開の係数は問題とする特定の過程やクォークの閉じ込めから独立なので, 係数 $\mathcal{A}_{si}$ と $\mathcal{B}_{si}$ は仮想的に単純な過程を考察することにより求めることができる. それはフレーバー f の自由クォークによる電子の散乱だ. くりこまれた演算子 $\mathcal{O}_{si}$ は, 演算子 (20.6.23) と (20.6.24) の1クォーク行列要素が樹木近似で与えられるように定義すると便利だ.

$$\langle f',\sigma'|\mathcal{O}_{sf}|f'',\sigma''\rangle=\frac{(-1)^si}{s!}\left(\bar{u}'\gamma^{\{\mu_1}u\right)p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_s\}}\delta_{ff'}\delta_{ff''}\,, \qquad (20.6.27)$$

$$\langle f',\sigma'|\mathcal{O}_{s0}|f'',\sigma''\rangle=0\,. \qquad (20.6.28)$$

(20.6.27) を $\sigma'=\sigma''$ について平均し, その結果を (20.6.19) と比べ

ると,

$$\langle \mathcal{O}_{sf}\rangle_{f'}\frac{m_f}{p^0}\,p^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_s}=\delta_{ff'}\frac{(-1)^s\,i}{2s!}$$
$$\times\mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{-i\,\not{p}+m_f}{2p^0}\right)\gamma^{\{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_s\}}\right\}$$

を得る. そのため (s が偶数のとき),

$$\langle \mathcal{O}_{sf}\rangle_{f'}=\delta_{ff'}/m_f \tag{20.6.29}$$

と,

$$\langle \mathcal{O}_{s0}\rangle_{f'}=0 \tag{20.6.30}$$

となる. 演算子 $\mathcal{O}_{si}$ のこの定義を使うと, 演算子積展開の関数が樹木近似で計算できるように大きくとったくりこみの運動量の大きさ ℓ^2 では, これらの関数は電子・クォーク散乱断面積の樹木近似の表式から導くことができる. (20.6.9) と (20.6.10) を導くパートン模型の計算を再びたどると, フレーバー f のクォークからの電子散乱の W_r は樹木近似では以下で与えられることがわかる.‡

$$\nu W_{2,f}=(m_N/m_f)Q_f^2\delta(\omega-1)\,, \tag{20.6.31}$$

$$W_{1,f}=Q_f^2\delta(\omega-1)/2m_f\,. \tag{20.6.32}$$

これらの結果を分散関係 (20.6.18) に使うと, $\omega\neq 1$ では,

$$T_{1,f}=\frac{Q_f^2}{2\pi i m_f}\frac{1}{\omega^2-1}\,, \tag{20.6.33}$$

$$\nu T_{2,f}=\frac{2Q_f^2}{2\pi i}\frac{m_N}{m_f}\frac{\omega}{\omega^2-1} \tag{20.6.34}$$

‡(20.6.31) に因子 (m_N/m_f) が挿入されているのは, ν は $-q\cdot p/m_f$ ではなく $-q\cdot p/m_N$ として定義されていて, (20.6.2) に現れるのは, W_2/m_f^2 ではなく W_2/m_N^2 だからだ. これにより (20.6.10) から (20.6.32) が導かれる. 量 ω は質量に依存しないように $\omega=-2q\cdot p/q^2$ と書くこともできる.

を得る. これは電子・クォーク散乱のファインマン・ダイアグラムからも直接得ることができる結果だ. くりこみ点 $q^2 = \ell^2$ において (20.6.33) と (20.6.34) の ω^s の係数を (20.6.25) と (20.6.26) のなかのものと比較して, (20.6.29) および (20.6.30) を使うと,

$$\mathcal{A}_{si} = \frac{iQ_i^2}{2\pi}\,, \qquad \mathcal{B}_{si} = \frac{im_N Q_i^2}{\pi} \tag{20.6.35}$$

を得る. ここではグルーオンの電荷 Q_0 は当然のことながらゼロとおいた. 繰り返しになるが, これらの値は電子・クォーク散乱について求めたが, $\mathcal{A}_{si}$ と $\mathcal{B}_{si}$ は二つの電磁カレントの演算子積展開の因子であり, これらの演算子積の期待値を計算する状態に依らない. したがって (20.6.25) と (20.6.26) において (20.6.35) を使うことができ, 以下を得る.

$$T_1(\nu, q^2) \to \frac{i}{2\pi}\sum_{sij}\omega^s Q_i^2\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle\,, \tag{20.6.36}$$

$$\nu T_2(\nu, q^2) \to \frac{im_N}{\pi}\sum_{sij}\omega^{s-1} Q_i^2\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle\,. \tag{20.6.37}$$

最後に構造関数 $W_r(\nu, q^2)$ に戻ろう. $T_r(\nu, q^2)$ の $\omega^s = (2m_N\nu/q^2)^s$ の係数は (20.6.18) によって以下で与えられる.

$$\begin{aligned}&\frac{-2}{2\pi i}\left(\frac{q^2}{2m_N}\right)^s\int_{q^2/2m_N}^\infty d\nu'\,\nu'^{-1-s}W_r(\nu', q^2)\\ &\qquad\qquad = \frac{i}{\pi}\int_1^\infty d\omega\,\omega^{-1-s}W_r\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right)\,.\end{aligned}$$

(20.6.36) および (20.6.37) と比較して以下を得る.

$$\int_1^\infty d\omega\,\omega^{-1-s}W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i^2\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle, \tag{20.6.38}$$

$$\int_1^\infty d\omega\,\omega^{-s}\nu W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to m_N\sum_{ij} Q_i^2\left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij}\langle\mathcal{O}_{sj}\rangle. \tag{20.6.39}$$

これらの方程式を満たす W_r は明らかにパートン模型の表式 (20.6.9) と (20.6.10) と同様に表すことができる.

$$W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2)\ , \tag{20.6.40}$$

$$\nu W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \frac{2m_N}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2)\ . \tag{20.6.41}$$

ここで $\mathcal{F}_i$ はパートン分布関数であり, モーメント方程式,

$$\int_0^1 dx\ x^{s-1}\mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{1}{2}\sum_j \left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj}\rangle \tag{20.6.42}$$

で定義される. 特に, 漸近的自由性はブヨルケン・スケーリングの補正版を意味するだけではなく, W_1 と W_2 の間のキャラン・グロス関係式 (20.6.12) も意味することがわかる.

モーメント方程式 (20.6.42) はアルタレリ (Altarelli) とパリジ (Parisi)[15] によってエレガントな形式にまとめられ, これは深非弾性散乱の研究に広く用いられるようになった. (20.6.42) とくりこみ群方程式 (20.3.8) は以下の微分方程式を導く.

$$q^2\frac{d}{dq^2}\int_0^1 dx\ x^{s-1}\mathcal{F}_i(x, q^2) = -g_q^2\sum_j c_{ij}(s)\int_0^1 dx\ x^{s-1}\mathcal{F}_j(x, q^2)\ . \tag{20.6.43}$$

これらの方程式は, くりこみ点 ℓ^2 での「初期」条件,

$$\int_0^1 dx\ x^{s-1}\mathcal{F}_i(x, \ell^2) = \tfrac{1}{2}\ \langle \mathcal{O}_{si}\rangle \tag{20.6.44}$$

を使うと解を一つだけ持ち, そのためにこれらをモーメント方程式の代りに使うことができる. さて, (20.6.43) は以下の $\mathcal{F}_i$ の微分方程式の解によって満たされている.

$$q^2\frac{d}{dq^2}\mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{g_q^2}{4\pi^2}\sum_j \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ij}\left(\frac{x}{y}\right)\mathcal{F}_j(y, q^2)\ . \tag{20.6.45}$$

ここで, 行列関数 $P_{ij}(z)$ は以下の条件を満たなければならない.

$$\int_0^1 z^{s-1} P_{ij}(z)\, dz = -4\pi^2 c_{ij}(s)\ . \tag{20.6.46}$$

($4\pi^2$ の因子は便宜的なものだ.)

行列 $c_{ij}(s)$ は量子色力学ではジョージャイとポリッツァー[16], および, グロスとウィルチェック[17] によって計算された. 彼らは, N フレーバーのクォークが十分軽くて質量ゼロとして扱えるとした. また, 他の全てのフレーバーのクォークは非常に重く, 積分され, それらは強い相互作用の結合定数への影響以外は無視できるとした. 彼らの結果は, 演算子 (20.6.23) と (20.6.24) に対して, 以下となる.

$$c_{00}(s) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{C_1\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \sum_{t=2}^{s}\frac{1}{t}\right] + \frac{N}{3}C_2\right\}\ , \tag{20.6.47}$$

$$c_{f0}(s) = \frac{1}{\pi^2}C_2\left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right]\ , \tag{20.6.48}$$

$$c_{0f}(s) = \frac{1}{8\pi^2}C_3\left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s-1)}\right]\ , \tag{20.6.49}$$

$$c_{ff'}(s) = \frac{1}{8\pi^2}C_3\left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\sum_{t=2}^{s}\frac{1}{t}\right]\delta_{ff'}\ . \tag{20.6.50}$$

ここで 0 と f はそれぞれ演算子 (20.6.24) と (20.6.23) を意味する. 定数 C_1 と C_2 は (17.5.33) と (17.5.34) で ((17.5.34) のトレースにはクォークのフレーバーを一つだけ含んで) 定義される. N はクォーク・フレーバーの個数, C_3 は (17.4節の記法で) ,

$$t_\alpha t_\alpha = C_3\, g^2\, 1 \tag{20.6.51}$$

と定義される. $SU(3)$ ゲージ群でクォークがその基本表現 **3** だという

現実的な場合には, これらの数は,

$$C_1 = 3\,, \qquad C_2 = \tfrac{1}{2}\ \ , \qquad C_3 = \tfrac{4}{3} \tag{20.6.52}$$

となる.

これらの比較的複雑な結果は, アルタレリ・パリジ関数を使って表すとより簡単になる. 以下が成立すると (20.6.46) が満たされることは簡単に確認できる.

$$P_{ff'} = \delta_{ff'}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+}\right) + 2\delta(1-x)\right]\,, \tag{20.6.53}$$

$$P_{f0} = x^2 - x + \frac{1}{2}\,, \tag{20.6.54}$$

$$P_{0f} = \frac{4}{3}\left[\frac{2}{x} - 2 + x\right]\,, \tag{20.6.55}$$

$$P_{00} = 6\left[\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{11}{12}\delta(1-x)\right] - \frac{N}{3}\delta(1-x)\,. \tag{20.6.56}$$

ここで, $x=1$ までの x 積分では $1/(1-x)_+$ は,

$$\frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \frac{f(x)-f(1)}{1-x} \tag{20.6.57}$$

で定義される.

各 s において, 明かに行列 $c(s)$ の $(N-1)$ 重の縮退した固有値がある. それらは (20.6.50) の $\delta_{ff'}$ の係数に等しい.

$$c(s, \text{随伴}) = \frac{1}{8\pi^2}C_3\left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\sum_{t=2}^{s}\frac{1}{t}\right]\,. \tag{20.6.58}$$

その固有演算子は演算子 (20.6.23) の線形結合でその係数 a_f は $\sum_f a_f = 0$ を満たす全ての独立なものだ. それは, N 個のクォーク・フレーバーを持つ量子色力学の破れていない大域的 $SU(N)$ 対称性の随伴表現に属する. 各 s について, さらに $SU(N)$ の単位表現に属する固有

演算子が二つある．これらは, 演算子 (20.6.24) と演算子 (20.6.23) の f についての和の二つの線形結合で与えられる．これらの固有演算子と対応する固有値は 2×2 行列,

$$c(s)_{1\,\text{重項}} = \begin{bmatrix} c_{00}(s) & c_{0f}(s)N \\ c_{f0}(s) & c(s,\text{随伴}) \end{bmatrix} \tag{20.6.59}$$

を対角化して得られる．$s = 2$ では, この行列は,

$$c(2)_{\text{singlet}} = \begin{bmatrix} NC_2/6\pi^2 & NC_3/6\pi^2 \\ C_2/3\pi^2 & C_3/3\pi^2 \end{bmatrix} \tag{20.6.60}$$

という形になる．これはゼロ固有値を一つ持ち, $\mathcal{O}_{20}^{\mu\nu}$ と $\sum_f \mathcal{O}_{2f}^{\mu\nu}$ の線形結合でエネルギー・運動量テンソルに等しいものに相当する．これは J^μ と同様にくりこみを受けない．行列 (20.6.60) の他の固有値はそのトレース $NC_2/6\pi^2 + C_3/3\pi^2$ で与えられる．さて, ある与えられた s について, $c_{ij}(s)$ の最小固有値は任意の $s' < s$ の $c_{ij}(s')$ の最小固有値よりも大きくなければならない．これは, そうでなければ十分に大きな q^2 について (20.6.42) の積分がやがて s' よりも s について大きくなり，この積分が厳密に s の減少関数だという事実に反するからだ．$s = 2$ については最小固有値はゼロだから，$s > 2$ の他の全ての固有値は正だと結論できる．実際, $s > 2$ ではくりこまれない演算子は無いので, それらは全てゼロより大きい．したがって, $g_q^2 \to 0$ でエネルギー・運動量テンソルのみの寄与が生き残るという極端な場合にのみ, ブヨルケン・スケール則が厳密に満たされる．厳密なブヨルケン・スケール則の破れは, 電子・核子とミュー中間子・核子の深非弾性散乱の徹底的な研究によって実験的に確認された．

20.7 リノーマロン*

場の量子論の登場以来，理論家は物理的な行列要素についての摂動級数が収束するかどうか，また，もし収束しなければそれについて何ができるかについて思いをめぐらせてきた．現代的な場の量子論の非常に初期に，ダイソン[18] は n 次のダイアグラムの数は $n!$ の程度に大きくなることに気づいた．これは摂動論の収束半径がゼロであることを示唆する．

n 次の項が $n!$ のように大きくなる冪級数の収束性を改善するにはボレル変換という良く知られた方法[19] があり，これで級数を収束させたり，少なくともその級数の振舞いを改善して結合定数のより広い範囲にわたって漸近級数として扱えるようにすることができる．ある与えられた級数，

$$F(g) = \sum_n f_n g^n \tag{20.7.1}$$

について，それに関係した級数，

$$B(z) \equiv \sum_n f_n z^n/n! \tag{20.7.2}$$

を考える．もし，f_n が $n!$ より速く大きくならなければ，$B(z)$ は一般的に有限の収束半径を持つ．問題は，(20.7.2) の級数から元の (20.7.1) の級数を得ることができるかどうかだ．良く知られた関係式，

$$\int_0^\infty \exp(-z/g)\, z^n\, dz = n!\, g^{n+1}$$

を用いると，少なくとも形式的には，

$$gF(g) = \int_0^\infty \exp(-z/g)\, B(z)\, dz \tag{20.7.3}$$

となることがわかる．

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので，最初読むときには飛ばしてもよい．

$B(z)$ が複素平面上のどこかに特異性を持てば，それによって級数 (20.7.2) の収束半径が制限される．しかし, その特異性が正の実軸上になければ, これは乗り越えれない問題ではない．(20.7.3) を使って $F(g)$ を計算するには，$B(z)$ を z の g より小さいか, またはその程度の大きさの実の正値について知ればよい．これは, もし $B(z)$ の複素平面上の特異性が全て原点から g よりずっと大きな距離にあれば, 冪級数 (20.7.1) より得ることができる．もし, いくつかの極 z_1,z_2 等が g と同じかそれより小さい絶対値を持っていても，$(z-z_1)(z-z_2)\cdots B(z)$ に対する冪級数を使って $B(z)$ を g の大きさの z まで求めることができる．しかし, そのためにはどこに極があるかを知らなければならない．

$B(z)$ の正の実軸上の特異性は (20.7.3) を無効にしてしまうのでたちが悪い．この積分の経路は正の実軸上の特異性を避けるように曲げることもできるが, それは特異性の上を通るか，下を通るかという不定性をもたらす．

この節ではボレル変換 $B(z)$ には**インスタントン** (instanton) として知られる古典的な場の方程式の解に伴う特異性と，演算子積展開に関係した**リノーマロン** (renormalon) として知られる特異性が存在することを示す．量子色力学では, 摂動級数の和をとるためのボレル変換を妨害するのはリノーマロンだ．

1976 年にリパトフ (Lipatov)[20] はボレル変換 $B(z)$ の特異性のいくつかは, 場の方程式の古典解の存在に伴っていることを示した．以下の経路積分で定義される関数 $F(g)$ を考える．

$$F(g) \equiv \int [d\phi] \exp\left(I[\phi, g]\right) \ . \tag{20.7.4}$$

(虚時間経路積分の使用については, 23 章の補遺 A で論じる.) 冪級数

(20.7.1) の係数は,

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int [d\phi] \oint dg\, g^{-n-1} \exp\left(I[\phi, g]\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int [d\phi] \oint dg\, \exp\Big(I[\phi, g] - (n+1)\ln g\Big) \qquad (20.7.5)$$

で与えられる. ここで, $\oint$ は複素 g 空間で $g = 0$ の点を囲む閉曲線についての反時計まわりの一周積分を意味する. n が非常に大きいとき, この積分は最後の行の指数関数の変数が ϕ と g の両方について停留する点 ϕ_n, g_n から主要な寄与を受けると仮定するのが妥当だ.

$$\left.\frac{\delta I[\phi, g_n]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi=\phi_n} = 0\,, \qquad (20.7.6)$$

$$\left.\frac{\partial I[\phi_n, g]}{\partial g}\right|_{g=g_n} = \frac{n+1}{g_n}\,. \qquad (20.7.7)$$

たとえば, もし $I[\phi, g]$ が質量ゼロのスカラー場の作用,

$$I[\phi, g] = -\frac{1}{2}\int \partial_i\phi\partial_i\phi\, d^4x - \frac{g}{24}\int \phi^4\, d^4x \qquad (20.7.8)$$

だと仮定しよう. ここで, 和はユークリッド座標の方向 1, 2, 3, 4 についてとる. そうすると, 場の方程式 (20.7.6) は,

$$\Box\phi_n = \tfrac{1}{6}\, g_n\phi_n^3 \qquad (20.7.9)$$

となる. 後で g_n は負だとわかるので, 解は以下の通りだ.

$$\phi_n(x) = (-g_n)^{-1/2}\chi(x)\,. \qquad (20.7.10)$$

ここで, $\chi(x)$ は方程式,

$$\Box\chi = -\tfrac{1}{6}\chi^3 \qquad (20.7.11)$$

の解で g に独立だ. 条件 (20.7.7) から,

$$-\frac{1}{24}\int d^4x\, \phi_n^4 = \frac{n+1}{g_n}$$

もしくは, スケールを変えた場 (20.7.10) を使って,

$$g_n = -\frac{1}{24(n+1)}\int d^4x\,\chi^4 \tag{20.7.12}$$

とわかる. この停留点では, 作用 (20.7.8) は以下となる.

$$I[\phi_n, g_n] = -\frac{1}{2}\int \partial_i\phi_n\partial_i\phi_n\,d^4x - \frac{g_n}{24}\int \phi_n^4\,d^4x = \frac{g_n}{24}\int \phi_n^4\,d^4x$$
$$= -n-1\,. \tag{20.7.13}$$

(20.7.5) をこの停留点で計算すると, $n\to\infty$ で以下を得る.**

$$f_n \approx g_n^{-n-1}\exp\Big(I(\phi_n, g_n)\Big) = (n+1)^{n+1}\left(-\frac{e}{24}\int \chi^4\,d^4x\right)^{-n-1}$$
$$\approx n!\left(-\frac{1}{24}\int \chi^4\,d^4x\right)^{-n}\,. \tag{20.7.14}$$

したがって, $B(z)$ の主要な特異性は $z=z_1$ での極だ. ここで,

$$z_1 = -\frac{1}{24}\int \chi^4\,d^4x \tag{20.7.15}$$

となる. これは負なので, (20.7.3) の積分を実行する妨げにはならない. 極の位置 (20.7.15) を計算するには場の方程式 (20.7.11) に解,

$$\chi = \frac{4\sqrt{3}a}{r^2+a^2} \tag{20.7.16}$$

があることに気づけば良い. ここで, $r=(x_ix_i)^{1/2}$ であり, a は任意のパラメータだ. この場の方程式の解は23.5節で論じる「インスタントン」解の初歩的な例になっている. (これらは世界線上にあるのではな

** ここで記号「≈」は「定数因子と n の冪を除いて漸近的に等しい」と解釈するべきだ. それらの因子は $(n+1)!$ についてのスターリングの表式の因子 $\sqrt{12\pi n}$, $(n+1)!$ と $n!$ の比, そして, 停留点のまわりの g と $\phi(x)$ の揺らぎについての積分などから生じる. 最後の源からの因子は計算しないので, 最初の二つの源からの因子を残しておくのは意味が無い.

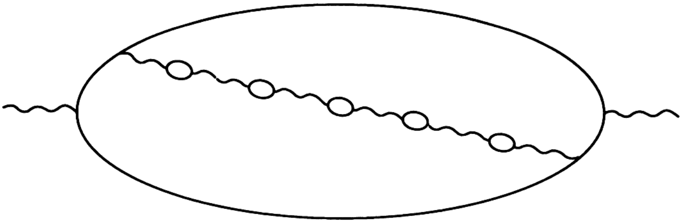


図 20.3: $N!$ のように大きくなるファインマン・ダイアグラムの組の一つ. 実線はフェルミオン, 波線はゲージボゾン.

く, 時空の点, この場合は原点の近くに集中しているので, インスタントンと呼ばれる.) 幸運にも極の位置は a に依存しない.

$$z_1 = -96\pi^2 a^4 \int_0^\infty \frac{r^2\, dr^2}{(r^2+a^2)^4} = -16\pi^2 \ . \tag{20.7.17}$$

これで, $g \ll 16\pi^2$ ならば $B(z)$ の摂動級数を (20.7.3) に使えることがわかる. もし $g/16\pi^2$ が1より大きくても, $B(z)$ を $(z+16\pi^2)B(z)$ の摂動級数から計算することができる.

23.5 節では, 量子色力学のような非可換ゲージ理論にはインスタントン解があるが, これらも負の実軸上にある比較的無害な特異性を $B(z)$ に与えることを見る. 量子色力学の現実の問題はこれと異なる種類の特異性であり, これらはリノーマロンとして知られている. それらは当初, 20.3図に示されているような一つの $2n$ 次のダイアグラムが $n!$ のように大きくなる寄与を与え, (20.7.2) に従えば $B(z)$ に付加的な特異性を与えることに気づくことによって発見された.[22] この場合は, 量子色力学の変化する結合定数 g_μ を定義するのに用いられた運動量よりはるかに小さな仮想運動量から生じるので, 特に赤外リノーマロンとして知られている. 幸運にも, 個々のファインマン・ダイアグラムを調べることなしに, 演算子積展開を使って赤外リノーマロンを特定することが可能だ.

簡単だが重要な例として，量子色力学において, 真空ダイアグラムに4元運動量 q を持ち込み, 持ち去る, 4元ベクトルカレント J^{μ}_{α} と J^{ν}_{β} が挿入されたもの全ての和 $\Pi^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(q)$ を考える. ($\Pi^{\mu\nu}(q)$ は電弱真空偏極へのハドロンの寄与を与え，その虚部は $e^{+}\cdot e^{-}$ 消滅と電子・反ニュートリノ消滅でハドロンが形成される過程の断面積を与える.) 20.5 節で見たように, これには演算子 1 から q^2 (x^{-6} のフーリエ変換) のように振舞う寄与, 演算子 $F^{\mu\nu}_{\alpha}F_{\alpha\mu\nu}$ から q^{-2} の寄与，4フェルミオン演算子から q^{-4} の寄与等がある. (たとえば, 演算子 $F^{\mu\nu}_{\alpha}F_{\alpha\mu\nu}$ からの寄与は20.3図にあるようなダイアグラムで q より非常に小さい運動量が泡の鎖を流れる場合から発生する.) 次元解析から, これらの運動量に依存する因子は Λ^0, Λ^4,Λ^6 等に比例する真空行列要素が伴わなければならないことがわかる. しかし, もしスケール $\mu \gg \Lambda$ で定義された変化する結合定数を使ってファインマン・ダイアグラムを計算するならば，この領域で結合定数が小さいので，(18.7.7) により,

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left(-\frac{12\pi}{(33-2n_f)\alpha_s(\mu)}\right) \tag{20.7.18}$$

となる. ここで, n_f は μ よりずっと軽い質量のクォークのフレーバーの数だ. 次元 $d>0$ の演算子は演算子積展開に以下の結合定数依存性を持つ寄与をする.

$$\Lambda^d \propto \exp\left(-\frac{6\pi d}{(33-2n_f)\alpha_s(\mu)}\right) . \tag{20.7.19}$$

量子色力学では, 摂動論は g ではなく $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ の冪の級数を与える. したがって, (20.7.1) と (20.7.3) を α_s を使って以下の様に書き換える.

$$F(\alpha_s) = \sum_n f_n \alpha_s^n , \tag{20.7.20}$$

$$\alpha_s F(\alpha_s) = \int_0^\infty \exp(-z/\alpha_s)\, B(z)\, dz . \tag{20.7.21}$$

$\Pi^{\mu\nu}$ で (20.7.19) のように結合定数に依存する項があるということは $B(z)$ は,

$$z_1 = \frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)} \tag{20.7.22}$$

で (必ずしも極ではないが) 特異性を持つことを示唆する. それらは正の実軸上にあり, 積分 (20.7.21) を不定にする. したがって, ボレル和は量子色力学で低エネルギーの現象を扱うのには使えない.

仮想運動量が小さいダイアグラムのせいで摂動論が使えなくなるというのは何も新しいことではない. 20.2節で見たように, 演算子積展開の重要な点はファインマン・ダイアグラムのうち, どの線も大きな運動量を持つ部分を分離することにある. その部分は漸近的自由な理論では摂動論を用いて計算することができる. ファインマン・ダイアグラムのうち, 残された小さな運動量が流れる部分は摂動論では計算できない.

補遺：運動量の流れの一般的な場合

この補遺では一般的なくりこみ可能な場の量子論において, 任意の2本以上の外線の運動量が大きい振幅の漸近的振舞いを, 任意個数の場の因子と微分を含み次元がある限界 N 以下の演算子を取り入れることによって, 考察する. この問題を扱うために20.1節や20.2節よりもより簡略な記法を導入する必要がある. 文字 ℓ,ℓ' 等はファインマン・ダイアグラムか部分ファインマン・ダイアグラムに入るか出て行く特定の種類の外線 i の集合を意味する. 文字 k,k' 等はそのような線の4元運動量の集合で, その和がある固定された値 p に等しいという条件を満たすものを意味する. 振幅 $\Gamma_{\ell\ell'}(k, k', p)$ は運動量 k を持ち入射する線の集合が ℓ で運動量 k' を持ち出て行く線の集合が ℓ' の全てのダイアグラムの和だ. これには, 集合 ℓ の裸のプロパゲーターは含むが ℓ' については含まない.

12.1節で引用した冪勘定定理[3]で示されるように, k の大きさの運動量が外線 ℓ と ℓ'' の部分ダイアグラムのみを流れる積分領域からは $\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p)$ に $k^{d(\ell,\ell'')}$ の大きさの寄与がある. ここで, $d(\ell,\ell'')$ はこの部分ダイアグラムの (質量や運動量の冪での) 次元だ.

$$d(\ell,\ell'') = 4 - \sum_{i\in\ell,\ell''}(1+s_i) - \sum_{i\in\ell}(2-2s_i)\,. \tag{20.A.1}$$

((20.A.1) の最後の項は集合 ℓ の線のプロパゲーターから生じる.)
(20.A.1) を,

$$d(\ell,\ell') = 4 - 4n(\ell) - N(\ell') + N(\ell) \tag{20.A.2}$$

と書き換えると便利だ. ここで $n(\ell)$ は集合 ℓ の線の数, $N(\ell)$ はこれらの線の場の次元の和だ.

$$n(\ell) \equiv \sum_{i\in\ell} 1\,, \qquad N(\ell) \equiv \sum_{i\in\ell}(s_i+1)\,. \tag{20.A.3}$$

ここで s_i は i 種の線の12.3節の意味での「スピン」だ. つまり, i 種の場の次元は $1+s_i$ であり, その場の裸のプロパゲーターは k^{-2+2s_i} と振舞う. (スカラーとゲージ・ボゾンでは $s_i=0$, スピン 1/2 では $s_i=1/2$ だ.)

これらの部分ダイアグラムに伴う漸近的振舞いを勘定に入れて, k' と p を固定して $k\to\infty$ (全ての成分が一般的な方向に向けて一斉に無限大に行く) とすると, $\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p)$ の摂動論の各次数で,

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) \to \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U^{\ell}_{\mathcal{O}}(k)\, F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) + o\left(k^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N}\right) \tag{20.A.4}$$

という漸近形をしていることを示したい. ここで, 和は次元が $N(\mathcal{O}) \le N$ の演算子 $\mathcal{O}$ についてとる. 関数 $U^{\ell}_{\mathcal{O}}(k)$ は $k^{4+N(\ell)-4n(\ell)-N(\mathcal{O})}$ の大きさであり, $o(k^A)$ は k^A より (最低限 $1/k$ の因子一つは) 速くゼロとなる項を意味する.

次元 $\leq N$ の演算子の寄与を分離するために,「N 既約」振幅 $I^N_{\ell\ell'}(k,k',p)$ を, 集合 ℓ に属する線は $N(\ell'') \leq N$ の内線のどんな集合 ℓ'' を切っても集合 ℓ' の線から分離されない $\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p)$ の全てのダイアグラムの和と定義する. 差 $\Gamma - I^N$ はこのようには分離できるダイアグラムからなるので,

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) - I^N_{\ell\ell'}(k,k',p) = \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk''\, I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p)\,\Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p) \tag{20.A.5}$$

と書ける. ここで $\sum_{\ell''}^{(N)}$ は $N(\ell'') \leq N$ の粒子線 ℓ'' についての和, $\int dk''$ は集合 ℓ'' の4元運動量の成分について, その和を p と拘束した積分だ.

核 $I^N_{\ell,\ell''}(k,k'',p)$ の漸近的振舞いは $\Gamma_{\ell,\ell''}(k,k'',p)$ の漸近的振舞いよりはるかに簡単だ. k'' と p を固定して $k \to \infty$ としたとき, それはどの内線も k の大きさの運動量を持っている積分領域から主要な寄与を受け, $k^{d(\ell,\ell'')}$ の漸近的振舞いとなる. これは部分領域のみがそのように大きな運動量を担っている項は, ダイアグラムの他の部分と $N(\ell''') > N \geq N(\ell'')$ の橋 ℓ''' によって結合されていなければならず, これは $k \to \infty$ において最低 $k^{N(\ell'')-N-1}$ の因子分は小さくなるからだ. したがって, $I^N_{\ell,\ell''}(k,k'',p)$ を k'' か p のどれかの成分で微分すると, その漸近的振舞いは $k^{d(\ell,\ell'')-1}$ に落ちる. しかし, d 回微分すると, その漸近的振舞いは $d \leq N - N(\ell'') + 1$ の場合にのみ $k^{d(\ell,\ell'')-d}$ に落ちる. なぜなら, それより高次の微分では, k の大きさの運動量を持つ部分ダイアグラムがダイアグラムの他の部分と全次元が N より大きな線の橋 ℓ''' で結ばれていて, k'' か p の大きさの運動量を持つ線に全ての微分がかかっている積分領域からもっと大きな寄与があるからだ. したがって, 場の微分を含む演算子の寄与を考慮に入れるには,

I^N の漸近的振舞いを以下の通りに書く.

$$I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p) = \sum_{\nu:d_\nu+N(\ell'')\le N} I^N_{\ell\ell''\nu}(k)\,P_{\ell''\nu}(k'',p) \\ +o\Big(k^{d(\ell,\ell'')-N+N(\ell'')}\Big)\,. \tag{20.A.6}$$

ここで $P_{\ell''\nu}(k'',p)$ は $n(\ell'')$ 個の運動量 k'' と p の d_ν 次の斉次多項式の完全系, そして $I^N_{\ell\ell''\nu}(k)$ は k のみの関数で $k\to\infty$ で $k^{d(\ell,\ell'')-d}$ の大きさだ.

(20.A.5) において, (20.A.6) をすぐに適用することはできない. これは, k'' 積分にはどれかの k'' が k の大きさの領域が重要な寄与をするからだ. これに対処するためには数学的帰納法を使う. つまり, まず (20.A.4) が摂動論のある次数まで成立するとして, それを (20.A.5) の右辺に使って Γ の摂動論の次の次数での漸近的振舞いを計算する. (20.A.5) を以下の形に書きかえる.

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) = I^N_{\ell\ell'}(k,k',p) \\ +\sum_{\ell''}^{(N)}\int dk''\,I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p)\left[\Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p)-\sum_{\mathcal{O}}^{(N)}U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'')\,F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p)\right] \\ +\sum_{\mathcal{O}}^{(N)}F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p)\sum_{\ell'':\,N(\ell'')\le N}\int dk''\,I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p)U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'')\,. \tag{20.A.7}$$

(20.A.4) によれば, (20.A.7) の右辺第 2 項の角括弧のなかの量は, $k''\to\infty$ において $(k'')^{4-4n(\ell'')+N(\ell'')-N}$ より速く減少するから, この因子と $\nu\le N-N(\ell'')$ の次数の多項式 $P_{\ell''\nu}(k'')$ の積は $(k'')^{4-4n(\ell'')}$ より速く減少し, k'' の $4(n(\ell'')-1)$ 個の独立成分については有限積分とな

る.* したがって, (20.A.6) をこの項に使い, 以下を得る.

$$\begin{aligned}\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) \to & \sum_{\nu:\ d_\nu+N(\ell')\le N} I^N_{\ell\ell'\nu}(k)\, P_{\ell'\nu}(k',p) \\ & + \sum_{\ell''}^{(N)} \sum_{\nu:\ d_\nu+N(\ell'')\le N} I^N_{\ell\ell''\nu}(k) \int dk''\, P_{\ell''\nu}(k'',p) \\ & \quad \times \left[\Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p) - \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'')\, F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p)\right] \\ & + \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk''\, I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p) U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'')\ .\end{aligned} \tag{20.A.8}$$

ここで, 補正項は書かれている項より $1/k$ の因子以上に小さい. (もちろん, (20.A.8) の右辺第1項は $N(\ell') \le N$ の場合にのみ存在する.)

さて, $d_\nu + N(\ell) \le N$ となっている ℓ と ν のそれぞれの値について, ℓ の線に対応する場の因子と d_ν 個の微分とを持つ演算子 $\mathcal{O}$ があり, 摂動論のゼロ次では演算子 $\mathcal{O}$ が入射運動量 p を持ち, 外線 ℓ が流出運動量 k を持つ頂点関数が多項式 $P_{\ell\nu}(k,p)$ となっている. したがって, くりこまれた演算子 $\mathcal{O}_R = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}\mathcal{O}'$ の対応する完全な頂点関数は,

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{O},\ell}(k,p) = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'} \Big\{ & \delta_{\ell_{\mathcal{O}'},\ell}\, P_{\ell\nu_{\mathcal{O}'}}(k,p) \\ & + \int dk'\, P_{\ell_{\mathcal{O}'}\nu_{\mathcal{O}'}}(k',p)\, \Gamma_{\ell_{\mathcal{O}'}\ell}(k',k,p) \Big\}\end{aligned} \tag{20.A.9}$$

* この議論では, (20.A.7) の右辺第2項の積分において, 全ての k'' が揃って無限大に行く領域での収束性は冪勘定によって保証されていても, $n(\ell'') \ge 3$ の部分積分が発散するという可能性を無視している. このために, この補遺での議論は, 20.2節で扱った2本の外線の運動量だけが無限大になり冪級数展開の場について2次の演算子の項のみを扱うという単純な場合以外には, 演算子積展開の証明にはならない.

となる．ここで, $\ell_{\mathcal{O}}$ と $\nu_{\mathcal{O}}$ は演算子 $\mathcal{O}$ が持つ場の種類と時空の微分を示す添字だ．すると (20.A.4) が満たされていて,

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k) = \sum_{\mathcal{O}'}^{(N)} I_{\ell\mathcal{O}'}^{N}(k)\left[Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}^{-1} - \int dk''\, U_{\mathcal{O}}^{\ell_{\mathcal{O}'}}(k'')\, P_{\mathcal{O}'}(k'')\right] + \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk''\ I_{\ell\ell''}^{N}(k,k'')\, U_{\mathcal{O}''}^{\ell}(k'') \tag{20.A.10}$$

であることがわかる．ここで簡略形,

$$I_{\ell\mathcal{O}}(k) \equiv I_{\ell\,\ell_{\mathcal{O}}\,\nu_{\mathcal{O}}}(k)\ , \qquad P_{\mathcal{O}}(k) \equiv P_{\ell_{\mathcal{O}}\,\nu_{\mathcal{O}}}(k) \tag{20.A.11}$$

を使った．($\Gamma_{\ell_{\mathcal{O}''}\ell'}$ の p 依存性は20.2節と同じ理由で落とした．k'' が k と同じ大きさか否かにかかわらず, p は k に比べれば無視できるからだ.) くりこまれた定数 $Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}$ はくりこみ点 $k(\mu)$, $p(\mu)$ で関数 $F_{\mathcal{O},\ell}(k(\mu),p(\mu))$ が相互作用がないときと同じ値 $\delta_{\ell\ell_{\mathcal{O}}} P_{\mathcal{O}}(k(\mu),p(\mu))$ をとるように定義する．

$$\delta_{\ell\ell_{\mathcal{O}}} P_{\mathcal{O}}(k(\mu),p(\mu)) = F_{\mathcal{O},\ell}(k(\mu),p(\mu)) = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'} \times \left\{\delta_{\ell_{\mathcal{O}'},\ell}\, P_{\ell\nu_{\mathcal{O}'}}(k(\mu),p(\mu)) + \int dk'\, P_{\ell_{\mathcal{O}'}\nu_{\mathcal{O}'}}(k',p(\mu))\, \Gamma_{\ell_{\mathcal{O}'}\ell}(k',k(\mu),p(\mu))\right\}. \tag{20.A.12}$$

$\Gamma = 0$ では解 $Z = 1$ が存在し, これは (与えられた線の集合の多項式は線形独立のはずだから) 唯一の解だ．したがって, 連続性により (20.A.12) は結合定数についてある有限の領域で唯一の解を持つ．このため, (20.A.10) は一般的な演算子積展開 (20.A.4) に現れる係数関数 $U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k)$ の再帰的定義を与える．

問題

1. フェルミオン場 ψ がスカラー場 ϕ と, $\bar{\psi}\psi$ および ϕ^4 の形の相互作用をする理論を考える. $\bar{\psi}(x)\psi(0)$ の演算積展開に現れる演算子で, その係数関数が (摂動論から判断して) 特異で $x \to 0$ においてゼロとならないものを書き出せ. それらの係数関数を1ループまでどのように計算するかを述べよ.

2. N 個の質量ゼロのクォークを持つ量子色力学を考え, スカラーと擬スカラーのクォーク2次形式のスペクトル関数を以下で定義する.

$$\sum_N \langle \mathrm{VAC}|\bar{\psi}(0)\lambda_\alpha\psi(0)|\mathrm{VAC}\rangle\langle \mathrm{VAC}|\bar{\psi}(0)\lambda_\beta\psi(0)|\mathrm{VAC}\rangle^* = (2\pi)^{-3}\theta(p^0)\rho^S_{\alpha\beta}(-p^2)\ ,$$

$$\sum_N \langle \mathrm{VAC}|\bar{\psi}(0)\gamma_5\lambda_\alpha\psi(0)|\mathrm{VAC}\rangle\langle \mathrm{VAC}|\bar{\psi}(0)\gamma_5\lambda_\beta\psi(0)|\mathrm{VAC}\rangle^* = (2\pi)^{-3}\theta(p^0)\rho^P_{\alpha\beta}(-p^2)\ .$$

ここで, λ_α はで $\mathrm{Tr}\,(\lambda_\alpha\lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$ と規格化されたトレース・ゼロのエルミートな $N \times N$ 行列の完全系だ. $\rho^S_{\alpha\beta}(\mu^2)$ と $\rho^P_{\alpha\beta}(\mu^2)$ の線形結合によって満たされるスペクトル関数の和則はどのようなものか?

3. パートン模型において, コンプトン散乱についての (8.7.7) と (8.7.38) の表式から (20.6.8) を導け.

4. 量子色力学においてツイスト4のゲージ不変, 対称, トレース・ゼロのテンソルを書き出せ.

5. $-g\phi^4/24$ $(g > 0)$ の相互作用をする質量ゼロのスカラー場の理論において, 関数 (20.7.3) が複素空間のどこにリノーマロン特異性を持つと考えられるか?

参考文献

1. K. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969)

2. W. Zimmerman, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, S. Deser, H. Pendleton, M. Grisaru 編, (MIT Press, Cambridge, 1970).

3. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1960).

4. C. Bernard, A. Duncan, J. LoSecco, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D12**, 792 (1975).

5. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 507 (1967). 一般的な場合については文献 4 を見よ.

6. K. Kawarabayashi and M. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 255 (1966); Riazuddin and Fayyazuddin, *Phys. Rev.* **147**, 1071 (1966).

7. M. Ademollo, G. Veneziano, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 83 (1969).

8. J. F. Donoghue and E. Golowich, *Phys. Rev.* **D49**, 1513 (1994).

9. この結果は1968年のウィーンでの「ロチェスター」会議で報告された. 文献は E. D. Bloom 他, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969); M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935 (1969).

10. J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1969).

11. R. P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969); *Photon-Hadron Interactions* (Benjamin, New York, 1972).

12. C. G. Callan and D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 156 (1969). キャランとグロスが使っている記号 ω は本書の記法では $2/\omega$ となることに注意されたい.

13. D. Gross and S. Treiman, *Phys. Rev.* **D4**, 1059 (1971).

14. N. Christ, B. Hasslacher, and A. H. Mueller, *Phys. Rev.* **D6**, 3543 (1972).

15. G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126**, 298 (1972).

16. H. Georgi and H. D. Politzer, *Phys. Rev.* **D9**, 416 (1974).

17. D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D9**, 980 (1974).

18. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).

19. たとえば, G. N. Hardy, *Divergent Series* (Oxford University Press, Oxford, 1949) を見よ.

20. L. N. Lipatov, Leningrad Nuclear Physics Institute report, 1976 (unpublished); *Proceedings of the XVIII International Conference on High Energy Physics at Tbilisi*, 1976.

21. G. 't Hooft, *The Whys of Subnuclear Physics – Proceedings of the 1977 Erice Summer School*, A. Zichichi 編 (Plenum, New York, 1978). リノーマロンと摂動論の高次についての論文集は, *Large Order Behavior of Perturbation Theory*, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin 編 (North-Holland, Amsterdam, 1990) を見よ. 赤外リノーマロンについてのより最近の文献としては, A. H. Mueller, *Phys. Lett. B* **308**, 355 (1993); *Nucl. Phys.* **B250**, 327 (1995); A. Duncan and S. Pernice, *Phys. Rev. D* **51**, 1956 (1995) 等や, それらに引用されたものがある.

22. B. Lautrup, *Phys. Lett.* **76B**, 109 (1977).

第21章

ゲージ対称性の自発的破れ

対称性が破れると質量ゼロでスピン・ゼロのゴールドストン・ボゾンが出現するという1961年に発見された定理[1]は，当初は自然界における破れた対称性を探す際の重大な障害のように見なされた．しかし数年後には，19.2節ですでに述べたように，幾人かの物理学者がこの定理に例外があることに気付いた．すなわち，破れたのが大域的対称性ではなく局所的対称性なら，ゴールドストン・ボゾンは現れないという事実だ．[2] 代わりに，これらの自由度は破れた局所的対称性にともなうベクトル粒子のヘリシティ・ゼロ状態として現れ，したがってその粒子は質量を持つ．この現象は，今日では一般にヒッグス機構(Higgs mechanism)と呼ばれているが，最初は現実的な理論には全く適用されなかった．これは多分1960年代中頃までには，パイ中間子が自発的に破れた近似的な対称性にともなうゴールドストン・ボゾンだということが明確になり，したがってゴールドストン・ボゾンを回避することに努力が払われなくなったからであろう．しかしすぐ後で，局所的対称性の自発的破れは素粒子の弱い相互作用と電磁相互作用を理解する自然な枠組みを与えることがわかってきた．

21.1 ユニタリー・ゲージ

19 章で見たように, 大域的対称性の群 G が部分群 H に自発的に破れた理論では, 各々の独立な破れた対称性毎に質量ゼロの「ゴールドストン」ボゾンが存在する. すなわち, スピン・ゼロの実場 $\phi_n(x)$ の質量行列 M^2_{nm} は, G の各々の独立な破れた対称性の生成子 t_α に対応して, ゼロ固有値と固有ベクトル $\sum_m (t_\alpha)_{nm} v_m$ を持つ. (ここではこれらのゴールドストン・ボゾンはラグランジアンに現れるスカラーまたは擬スカラー場 ϕ_n で表されるスピン・ゼロの素粒子の一つとする. より一般的な場合については 21.4 節で考察する.) これらのゴールドストン・ボゾンのモードは, 場に G 変換 $\gamma^{-1}(x)$,

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_m \gamma^{-1}_{nm}(x)\phi_m(x) \tag{21.1.1}$$

を施して新しい場がゴールドストン・ボゾン方向* と直交させる, すなわち,

$$0 = \sum_{nm} \tilde{\phi}_n(x)(t_\alpha)_{nm} v_m \tag{21.1.2}$$

とすることで消し去ることができることも見た. ここで v_n は真空期待値 $v_n \equiv \langle \phi_n(0) \rangle_{\text{VAC}}$ だ. (21.1.2) を満たすように場を回転させた後では, ゴールドストン・ボゾン場は時空に依存するパラメータ $\gamma(x)$ として再登場した. この手続きの重要な点は, 定数の $\gamma(x)$ を使った変換 (21.1.1) のもとでラグランジアンは不変なので, 全ての $\gamma(x)$ 依存性は $\gamma(x)$ に微分がかかる場合を除いて消えることだった.

他方, ラグランジアンが定数の G 変換ばかりでなく時空点に依存する G 変換のもとでも不変ならば, 変換 (21.1.1) は理論の真の対称性であり, 全ての $\gamma(x)$ 依存性はラグランジアンから消えて, したがって単に全ての $\phi_n(x)$ を $\tilde{\phi}_n(x)$ で置き換えることができる. これは,

---

*ここでは対称性代数の既約または可約な実表現を考えている. したがって行列 it_α は実だ. 複素表現への移行については後で述べる.

ゲージ場自身に条件を課す代わりに $\tilde{\phi}(x)$ に条件 (21.1.2) を課すことにより, ゲージを固定することに相当する. (例えば, 荷電スカラー場 $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$ の電磁理論では, 条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ または $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を課すことでローレンツ・ゲージまたはクーロン・ゲージのようなゲージを選ぶことができる. しかし, 例えば ϕ を実にとることで, すなわち 2 元ベクトル $\{\mathrm{Re}\phi, \mathrm{Im}\phi\}$ を 1 方向に回転することでゲージを選ぶこともできる.) (21.1.2) で定義されるゲージは**ユニタリー・ゲージ**[3a] と呼ばれる. なぜならこのゲージでは時間的ゲージ・ボゾンのような負の確率を持つ自由度は理論には全く含まれないことが明白だからだ. より一般的には, ユニタリー・ゲージでは理論に含まれる物理的粒子の構成が明白になる.

(21.1.2) よりユニタリー・ゲージではゴールドストン・ボゾン場は存在しないことがわかる. 理論はゲージ不変なので, このことはどのゲージを選んでも物理的なゴールドストン・ボゾンは存在しないことを意味する. ベクトル・ボゾンについてはどうだろう? もし ϕ_n が正準規格化された基本的なスカラー場なら, ラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\sum_n \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n - i\sum_{m,\alpha} t^\alpha_{nm}\, A_{\alpha\mu}\tilde{\phi}_m\right)^2 \tag{21.1.3}$$

の項を含む. ここで t^α はゲージ群 G の全ての生成子を動く. (今後チルダーは省略し, この節では既にユニタリー・ゲージを採っていると理解する.) 対称性 G は ϕ_n の真空期待値 v_n によって破れていると仮定しているので, 粒子のスペクトルの性質を見るために, ずらした場 ϕ',

$$\phi_n \equiv v_n + \phi'_n \tag{21.1.4}$$

を定義する. ((21.1.2) と (21.1.4) の v_n を樹木近似での真空期待値ととるのが便利なことが多い. 有用な摂動論を作るには, v_n は最低次で本当の真空期待値に一致しさえすればよい.) (21.1.3) を ϕ' と A につ

いて 2 次まで展開すると,

$$\mathcal{L}_{\phi,\mathrm{QUAD}} = -\frac{1}{2}\sum_n\left(\partial_\mu\phi'_n - i\sum_{m,\alpha}t^\alpha_{nm}\,A_{\alpha\mu}v_m\right)^2 \tag{21.1.5}$$

を得る. (21.1.2) を使うと, ϕ' と A の交差項は消えて,

$$\mathcal{L}_{\phi,\mathrm{QUAD}} = -\frac{1}{2}\sum_n\partial_\mu\phi'_n\partial^\mu\phi'_n - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mu^2_{\alpha\beta}A_{\alpha\mu}A^\mu_\beta \tag{21.1.6}$$

が得られる. ここで,

$$\mu^2_{\alpha\beta} \equiv -\sum_{nm\ell}t^\alpha_{nm}\,t^\beta_{n\ell}\,v_m v_\ell \tag{21.1.7}$$

と定義した. これとヤン・ミルズのラグランジアン $-\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F^{\mu\nu}_\alpha$ の 2 次の項を合わせると, ベクトル粒子は質量行列 $\mu^2_{\alpha\beta}$ を持つことがわかる. ここでの記法では生成子 t^α_{nm} はゲージ結合定数に比例し, よって (21.1.7) よりベクトル・ボゾンの質量もこれらの結合定数に比例する.

$\mu^2_{\alpha\beta}$ の代数的性質を少し見てみよう. t^α_{nm} は虚で反対称(したがってエルミート)なので, 行列 $\mu^2_{\alpha\beta}$ は実・対称・正行列だ. また, 生成子の実数の線形結合 $\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha$ が破れていなければ,

$$\sum_{\alpha,m}c_\alpha(t_\alpha)_{nm}v_m = 0 \tag{21.1.8}$$

となり, その場合キッブル(Kibble)が指摘したように[2] (21.1.7) より,

$$\sum_\beta\mu^2_{\alpha\beta}c_\beta = 0 \tag{21.1.9}$$

となる. すなわち, 破れていない各ゲージ対称性に対応するゲージ・ボゾンは質量ゼロのままだ. 逆もまた正しい. (21.1.7) より任意の実定数 c_α について,

$$\sum_{\alpha\beta}\mu^2_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta = \sum_n\left(\sum_{\alpha,m}c_\alpha\cdot it^\alpha_{nm}v_m\right)^2 \geq 0 \tag{21.1.10}$$

が成り立ち, 左辺がゼロになるのは c_α が (21.1.8) を満たすときだけだ.

特に, 破れていない対称性が $\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha$ の 1 個だけならば, 一般のゲージ場は,

$$A^\mu_\alpha = c_\alpha A^\mu + \cdots \tag{21.1.11}$$

と書くことができる. ここで「$\cdots$」は明確なゼロでない質量を持つゲージ場の線形結合を表す. また c_α は唯一の破れていない生成子 q,

$$q = \sum_\alpha c_\alpha\, t_\alpha \tag{21.1.12}$$

の t_α の係数なので, 質量項 $-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mu^2_{\alpha\beta}A^\mu_\alpha A_{\mu\beta}$ のなかで場 A^μ の係数はゼロだ. ゲージ場のラグランジアンの運動項 $-\frac{1}{4}\sum_\alpha(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})^2$ の $-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2$ の係数が正準値 1 となるには, c_α はまた,

$$\sum_\alpha c^2_\alpha = 1 \tag{21.1.13}$$

と規格化される必要がある. q は,

$$\sum_\alpha t_\alpha\, A^\mu_\alpha = q\, A^\mu + \cdots \tag{21.1.14}$$

の意味で A^μ が結合する荷電だ. ここでも, 「$\cdots$」は質量がゼロでないゲージ場を含む項を表す. これらの一般的な結果は 21.3 節で電弱理論を調べる際に使う.

以上の結果はここではゲージ群の実表現を形成するスカラー場について導いたが, 複素表現に対して適切な形に容易に書き換えることができる. 19.6 節で見たように, エルミートな生成子 T_α を持つゲージ群の表現に従って変換する複素スカラー場 $\chi(x)$ は, 実の場の組,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\chi(x) \\ \mathrm{Im}\,\chi(x) \end{pmatrix} \tag{21.1.15}$$

として記述できる. この場の組は生成子,

$$i\,t^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\,T^{\alpha} & -\mathrm{Re}\,T^{\alpha} \\ \mathrm{Re}\,T^{\alpha} & -\mathrm{Im}\,T^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{21.1.16}$$

を持つゲージ群の実表現を成す. (21.1.15) と (21.1.16) を (21.1.7) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mu^2_{\alpha\beta} &= \mathrm{Re}\left(\langle\chi\rangle^{\dagger}_{\mathrm{VAC}}\,,\, T_{\alpha}\,T_{\beta}\,\langle\chi\rangle_{\mathrm{VAC}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\,\left(\langle\chi\rangle^{\dagger}_{\mathrm{VAC}}\,,\,\{T_{\alpha},\,T_{\beta}\,\}\langle\chi\rangle_{\mathrm{VAC}}\right) \end{aligned} \tag{21.1.17}$$

というベクトル・ボゾンの質量行列が得られる.

次にベクトル場のプロパゲーターをもっと詳しく見てみよう. ヤン・ミルズのラグランジアンの 2 次項を含めて, 全ラグランジアンの A について 2 次の部分は,

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{4}\,\sum_{\alpha}(\partial_{\lambda}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\lambda})^2 - \tfrac{1}{2}\,\sum_{\alpha\beta}\,\mu^2_{\alpha\beta}\,A_{\alpha\lambda}A^{\lambda}_{\beta} \\ &\quad = \tfrac{1}{2}\,\sum_{\alpha\beta}A_{\alpha}{}^{\nu}\mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial)A_{\beta}{}^{\lambda} + [\text{全微分項}] \end{aligned} \tag{21.1.18}$$

となる. ここで,

$$\mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) = \delta_{\alpha\beta}\Big[\eta_{\nu\lambda}\Box - \partial_{\nu}\partial_{\lambda}\Big]\; - \;\mu^2_{\alpha\beta}\,\eta_{\nu\lambda} \tag{21.1.19}$$

と定義した. 簡単のため全てのゲージ対称性は破れており, したがって $\mu^2_{\alpha\beta}$ はゼロ固有値を持たないとする. 9.4 節で述べた一般的規則によれば, 運動量空間でのゲージ場のプロパゲーターは,

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) &= -(\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\nu,\beta\lambda}(ik) \\ &= \Big[(k^2+\mu^2)^{-1}(\eta_{\nu\lambda} + \mu^{-2}k_{\nu}k_{\lambda})\Big]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{21.1.20}$$

となる. $k_{\nu}\,k_{\lambda}$ 項のために, プロパゲーターは $\Delta(k) \sim O(k^0)$ の漸近的振舞いをする. このため通常の次数勘定の議論を使ってくりこみ可能

性を証明することはできない. 幸い, 次節で見るように, 理論に含まれる粒子があいまいになるという難点はあるが, くりこみ可能性が明白な別のゲージが存在する.

* * *

ゲージ結合定数がゼロになる極限で物理的スペクトルにゴールドストン・ボゾンが突然再登場するが, 物理的行列要素はこの極限で完全に連続的だという点は重要だ. これは, ユニタリー・ゲージではゲージ結合定数がゼロでもゲージ・ボゾンは完全には結合が切れないからだ. A と C がゲージ代数のある表現に属し, B と D がゲージ代数の別の表現に属する場合の散乱過程 $A+B \to C+D$ の行列要素を考察する. この過程の S 行列要素にはベクトル・ボゾン交換による,

$$
\begin{aligned}
S_{CD,AB} = & \, i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \\
& \times \langle C | J_{N\alpha}^{\ \nu} | A \rangle \, \Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) \langle D | J_{N\beta}^{\ \lambda} | B \rangle \qquad (21.1.21)
\end{aligned}
$$

の寄与がある. ここで $k = p_A - p_C = p_D - p_B$ で, $J_{N\alpha}^{\ \nu}$ はゲージ・ボゾンが結合するカレントだ. 添字 N はこのゲージではこのカレントのゴールドストン・ボゾンの極を省略していることを明示するために付けてある. このカレントはゲージ結合定数に比例するので, ゲージ結合定数がゼロの極限で残る (21.1.21) の唯一の項は, この極限で発散する行列 μ^{-2} を含む項だ. したがってゲージ結合定数がゼロのとき, S 行列要素は,

$$
\begin{aligned}
S_{CD,AB} \to & \, i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \\
& \times k_\nu k_\lambda (\mu^{-2})_{\alpha\beta} \langle C | J_{N\alpha}^{\ \nu} | A \rangle \, \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\beta}^{\ \lambda} | B \rangle \qquad (21.1.22)
\end{aligned}
$$

となる. カレントのゲージ結合定数は行列 μ^2 のゲージ結合定数と相殺する.

次にこの結果をゴールドストン・ボゾン交換の寄与と比較してみよう. ゲージ結合定数がゼロのとき, (簡単のため全てのゲージ対称性は

自発的に破れていると仮定して) 生成子 t_α にともなうゴールドストン・ボゾン B_α の組が存在し, それらは $-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_\alpha\partial^\mu\phi_\beta\sum_n Z_{\alpha n}Z_{\beta n}$ で与えられるラグランジアンの運動項を持つ. ここで $Z_{\alpha n}$ は (19.2.39) で定義されるスピン・ゼロの場 ϕ_n に含まれるゴールドストン・ボゾン B_α の成分だ. ゴールドストン・ボゾン場が正準的に規格化されているためには,

$$\sum_n Z_{\alpha n}Z_{\beta n} = \delta_{\alpha\beta} \tag{21.1.23}$$

でなければならない. (19.2.49) に従って, ゴールドストン・ボゾン B_α はカレント $J_N{}^\mu_\beta$ と結合定数 $F^{-1}_{\alpha\beta}$ で結合している. ここで $F_{\alpha\beta}$ は (19.2.38) で定義された生成子 t_α にともなうゴールドストン・ボゾンとカレント $J_N{}^\nu_\beta$ との結合定数だ. したがって, ゴールドストン・ボゾンの交換により散乱行列要素,

$$\begin{aligned} S_{CD,AB} = {} & i(2\pi)^4\delta^4(p_A+p_B-p_C-p_D) \\ & k_\nu k_\lambda F^{-1}_{\alpha\gamma}F^{-1}_{\beta\gamma}\langle C|J_N{}^\nu_\alpha|A\rangle\,\frac{1}{k^2}\langle D|J_N{}^\lambda_\beta|B\rangle \end{aligned} \tag{21.1.24}$$

が得られる. しかし (19.2.40), (21.1.7), (21.1.23) よりベクトル・ボゾンの質量行列は,

$$\mu^2_{\alpha\beta} = \sum_n F_{\alpha\gamma}Z_{\gamma n}F_{\beta\delta}Z_{\delta n} = F_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{21.1.25}$$

となり, よってゲージ・ボゾンの結合定数がゼロの極限で, ゲージ・ボゾン交換の行列要素 (21.1.22) はゴールドストン・ボゾン交換の行列要素 (21.1.24) と等しくなる. この議論の逆を辿ることも可能だ. すなわち, ゲージ結合がゼロでの連続性の要求を使うと他の全ての結合が強い場合でさえ, ゲージ・ボゾンの質量についての式を導くことができる.

21.2 くりこみ可能な ξ ゲージ

1971 年ト・フーフト[4]は自発的に破れたゲージ理論の経路積分は, 運動量が $k \to \infty$ のときベクトル・ボゾンのプロパゲーターが k^{-2} でゼロになるゲージで計算でき, したがってこれらの理論は 12.2 節で述べたくりこみ可能性についての次数勘定の検査に適合することを示した. ここでは藤川・リー・三田[5]により少し後に導入された任意定数 ξ をパラメータとする, より広いくりこみ可能なゲージの組を説明する.

一般のゲージで理論のスカラー場についてのラグランジアンの運動項 (21.1.3) は交差項,

$$i \sum_{nm\alpha} \partial_\mu \phi'_n \, t^\alpha_{nm} A_\alpha{}^\mu v_m$$

を含む. ここで v_m は ϕ_m の真空期待値, また ϕ'_n は (21.1.4) で定義した, ずらした場だ. ユニタリー・ゲージではこの項はゲージ条件 (21.1.2) の結果ゼロになった. ここでは, 15.5 節と 15.6 節の方法に類似の別の方法を採用する. 経路積分に汎関数 $B[f]$,

$$B[f] = \exp\left(\frac{-i}{2\xi} \int d^4x \sum_\alpha f_\alpha \, f_\alpha\right) \tag{21.2.1}$$

を導入する. これはラグランジアンにゲージ固定項,

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \sum_\alpha f_\alpha \, f_\alpha \tag{21.2.2}$$

を付け加えるのと同等だ. 15.5 節では $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$ ととったが, ここではゲージ固定関数を,

$$f_\alpha = \partial_\mu \, A^\mu_\alpha - i \, \xi (t_\alpha)_{nm} \phi'_n v_m \tag{21.2.3}$$

にとる. これにより (21.1.3) の交差項が (21.2.2) の交差項と相殺する. ここではユニタリー・ゲージは特殊な場合になっている. すなわ

ち, $\xi \to \infty$ でゲージ固定汎関数 (21.2.1) は, ユニタリー・ゲージ条件 (21.1.2) を満たす ϕ' で無限に鋭いピークを持つ. もう一つの特別の場合は $\xi \to 0$ の極限だ. この場合は, ゲージ固定汎関数はランダウ・ゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu_\alpha = 0$ を満たすゲージ場でピークを持つ.

ラグランジアンにゲージ不変性の条件,

$$\frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n}\,(t_\alpha)_{nm}\phi_m = 0 \tag{21.2.4}$$

を満たす 4 次の多項式項 $-P(\phi)$ も含める. もちろんラグランジアンにはゲージ場の項,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}\sum_\alpha F^{\mu\nu}_\alpha F_{\alpha\mu\nu} \tag{21.2.5}$$

も含めなければならない. すると, ゲージ場とスカラー場の全ラグランジアンは次のとおりだ.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A,\phi} &\equiv \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{gf} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_\alpha F^{\mu\nu}_\alpha F_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{n\alpha\beta}(t^\alpha\phi)_n(t^\beta\phi)_n A^\mu_\alpha A_{\beta\mu} \\
&\quad -\frac{1}{2\xi}\sum_\alpha(\partial_\mu A^\mu_\alpha)\ (\partial_\nu A^\nu_\alpha) - \frac{1}{2}\sum_n \partial_\mu\phi'_n\partial^\mu\phi'_n \\
&\quad +\frac{\xi}{2}\sum_{\alpha nm}(t_\alpha v)_n(t_\alpha v)_m\phi'_n\phi'_m - P(\phi) \\
&\quad +i\sum_{\alpha nm}\partial_\mu\phi'_n(t_\alpha)_{nm}\phi'_m A^\mu_\alpha + [\text{全微分項}]\,.
\end{aligned} \tag{21.2.6}$$

15.6 節で見たように, ゲージ固定汎関数 $B[f]$ を導入すると, f_α のゲージ変換性に依存するラグランジアンを持つゴースト場 $\omega_\alpha(x)$ も導入する必要がある. ($\epsilon_\alpha(x)$ を任意関数とする) 一般のゲージ変換,

$$\delta A^\mu_\alpha = -\sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_\beta A_\gamma{}^\mu + \partial^\mu\epsilon_\alpha\,, \tag{21.2.7}$$

$$\delta\phi_n = i\sum_{\alpha m}\epsilon_\alpha(t_\alpha)_{nm}\phi_m \tag{21.2.8}$$

のもとで f_α は,

$$\delta f_\alpha = \Box\, \epsilon_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(\epsilon_\beta A_\gamma{}^\mu) + \xi \sum_{n\beta}(t_\alpha v)_n\, \epsilon_\beta (t_\beta \phi)_n \tag{21.2.9}$$

と変換する. 15.6 節の一般的な結果によれば, これよりゴーストのラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_\omega = \omega^*_\alpha \left[\Box\, \omega_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(\omega_\beta A^\mu_\gamma) + \xi \sum_{n\beta}(t_\alpha v)_n \omega_\beta (t_\beta \phi)_n\right] \tag{21.2.10}$$

となる.

最後に, もし理論がスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンを含むと, 一般的なくりこみ可能項,

$$\mathcal{L}_\psi = -\bar{\psi}(\not{\partial} - i\not{A}_\alpha t^{(\psi)}_\alpha + m_0 + \Gamma_n \phi_n)\psi \tag{21.2.11}$$

が存在する. ここで $t^{(\psi)}_\alpha$ はフェルミオンに関するゲージ群の生成子の行列表現(結合定数の因子を含む)で, m_0 と Γ_n はゲージ不変性条件,

$$\left[t^{(\psi)}_\alpha,\, \gamma_4 m_0\right] = 0\,, \tag{21.2.12}$$

$$\left[t^{(\psi)}_\alpha,\, \gamma_4 \Gamma_n\right] + \sum_m (t_\alpha)_{mn}\, \gamma_4 \Gamma_m = 0 \tag{21.2.13}$$

を満たす定数行列だ(一般に, これらはディラック行列 1 と γ_5 に比例する項の線形結合となる). (因子 $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ は定義 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4$ から来る. これは $t^{(\psi)}_\alpha$ が γ_5 に比例する項を含むときにだけ重要だ.) 15.5 節と 15.6 節で証明した一般定理により, (21.2.6), (21.2.10), (21.2.11) の和で与えられるラグランジアンから計算される S 行列はゲージ固定関数 (21.2.3) に現れるパラメータ ξ のとり方には依らず, したがって任意の ξ についてユニタリー・ゲージに相当する $\xi = \infty$ ととったときと同じ結果が得られることが保証される.

これら全ての場のプロパゲーターを導くには, ラグランジアンの場について 2 次の部分,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm QUAD} = &-\frac{1}{4}\sum_{\alpha}\left(\partial^{\mu}A_{\alpha}{}^{\nu}-\partial^{\nu}A_{\alpha}{}^{\mu}\right)\left(\partial_{\mu}A_{\alpha\nu}-\partial_{\nu}A_{\alpha\mu}\right)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mu^2_{\alpha\beta}A^{\mu}_{\alpha}A_{\beta\mu}-\frac{1}{2\xi}\sum_{\alpha}(\partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha})\left(\partial_{\nu}A_{\alpha}{}^{\nu}\right)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{n}\left(\partial_{\mu}\phi'_n\right)\left(\partial^{\mu}\phi'_n\right)-\frac{1}{2}\sum_{nm}M^2_{nm}\phi'_n\phi'_m\\
&-\bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi-\partial_{\mu}\omega^*_{\alpha}\,\partial^{\mu}\omega_{\alpha}-\xi\sum_{\alpha\beta}\mu^2_{\alpha\beta}\omega^*_{\alpha}\omega_{\beta}\\
&+[\text{全微分項}]
\end{aligned}
\tag{21.2.14}
$$

が必要だ. ここで $\mu^2_{\alpha\beta}$ はベクトル・ボゾンの質量行列 (21.1.7) だ.

$$
\mu^2_{\alpha\beta} = -\sum_n (t^{\alpha}v)_n(t^{\beta}v)_n\ . \tag{21.2.15}
$$

また M^2_{nm} と m は新たなスカラーとフェルミオンの質量行列だ.

$$
\begin{aligned}
M^2_{nm} &= \left.\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m}\right|_{\phi=v} - \frac{\xi}{2}\sum_{\alpha}(t_{\alpha}v)_n(t_{\alpha}v)_m\ ,\\
m &= m_0+\sum_n \Gamma_n v_n\ .
\end{aligned}
\tag{21.2.16}
$$

(21.2.14) よりゴーストの質量はゲージに依存し, それは対応するベクトル・ボゾンの質量と $\sqrt{\xi}$ との積に等しい.

これらの表式は摂動論のゼロ次での粒子の質量を与える. この次数では, 真空期待値 v_n はちょうど多項式「ポテンシャル」 $P(\phi)$ の最小点だ.

$$
\left.\frac{\partial P(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\phi=v} = 0\ . \tag{21.2.17}
$$

また 19.2 節で見たように (21.2.4) と (21.2.17) から,

$$
\sum_m \left.\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m}\right|_{\phi=v}(t_{\alpha}v)_m = 0 \tag{21.2.18}
$$

が全ての α について成り立つ. したがって, 質量ゼロのゴールドストン・モードの代わりに (21.2.16) のスカラー・ボゾンの質量 2 乗行列はゼロでないベクトル・ボゾンの質量と $\sqrt{\xi}$ との積に等しい固有値を持つ. つまり, $\mu^2_{\alpha\beta}$ が固有値 μ^2 の固有ベクトル c_β を持てば, $\sum_\beta c_\beta t_\beta v$ は M^2 の固有値 $\xi\mu^2$ の固有ベクトルだ.

$$\sum_m M^2_{nm}\left(\sum_\beta c_\beta t_\beta v\right)_m = \xi \sum_{\alpha\beta} \mu^2_{\alpha\beta} c_\beta (t_\alpha v)_n = \xi\mu^2 \left(\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha v\right)_n . \tag{21.2.19}$$

M^2_{nm} の残りの固有ベクトルはこれら全てに直交し, よって全ての $t_\alpha v$ に直交するので, これらの固有ベクトルと対応する固有値は行列 $(\partial^2 P(\phi)/\partial\phi_n\partial\phi_m)_{\phi=v}$ のものと同じだ. ユニタリー・ゲージに対応する値 $\xi\to\infty$ では, ゴールドストン・ボゾンは非常に重くて理論から消えてしまうが, 他のボゾンの質量は通常の値のままだ.

プロパゲーターは通常の規則で計算される. ラグランジアンの自由粒子の部分が (部分積分の後に) 複素場 ζ について $-\zeta^\dagger\mathcal{D}(\partial)\zeta$ あるいは実場 ζ について $-\frac{1}{2}\zeta^T\mathcal{D}(\partial)\zeta$ のとき, この場のプロパゲーターは $\mathcal{D}^{-1}(ik)$ だ. これより, プロパゲーターは以下のとおりだ.

$$A: \quad \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(k) = \left[\frac{1}{k^2+\mu^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)k_\mu k_\nu}{k^2+\mu^2\xi}\right)\right]_{\alpha\beta} , \tag{21.2.20}$$

$$\phi: \quad \Delta_{nm}(k) = (k^2+M^2)^{-1}_{nm} + \xi\sum_{\alpha,\beta}(t_\alpha v)_n (t_\beta v)_m (k^2)^{-1}(k^2+\xi\mu^2)^{-1}_{\alpha\beta} , \tag{21.2.21}$$

$$\psi: \quad \Delta(k) = [-i\not{k}+m]\Big/(k^2+m^2) , \tag{21.2.22}$$

$$\omega: \quad \Delta_{\alpha\beta}(k) = (k^2+\xi\mu^2)^{-1}_{\alpha\beta} . \tag{21.2.23}$$

(21.2.20) の ξ に比例する非物理的な質量の 2 乗での極は (21.2.21) の同じ質量での極と相殺する. 有限な ξ の場合に全てのプロパゲーターは, くりこみ可能性から要求されるとおり, 対称性が破れていない場合と同じ漸近的振舞いをする. 特に, ベクトル・ボゾンのプロパゲーターの $k_\mu k_\nu$ 項はくりこみ可能性にとってもはや何の問題にもならない. なぜならそれには余分な因子 $(k^2+\mu^2\xi)^{-1}$ がついているからだ. $\xi=1$ のファインマン・ゲージをとってこの項を落とすことさえ可能だ. この因子がくりこみ可能性に必要なプロパゲーターの漸近的振舞いを与えることができないのは $\xi\to\infty$ のユニタリー・ゲージの場合だけだ.

たとえプロパゲーターの振舞いが良くても, これらの理論の紫外発散が破れたゲージ対称性によって制約され, その結果あらゆる無限大はラグランジアンの場とパラメータのくりこみにより相殺させることができることを示す必要が依然としてある. これは 17.2 節および 17.3 節と同じやり方で示せる. ただしその場合には, スピン・ゼロの場の真空期待値を, 対称性を破る固定した量と見なすのでなく外場として取り扱う.[5a]

21.3 電弱理論

自発的に破れたゲージ理論の最も重要な応用は弱い相互作用と電磁相互作用の理論に対してなされた.[3] 低エネルギーでの弱い相互作用は (19.4.22) のようにベクトル(軸性ベクトルも含む)・カレントの積の和で与えられる有効ラグランジアンで良く記述される. これは, これらの相互作用が電磁理論のようにある種のゲージ理論で記述されていることを示唆する. 電子型レプトンとミュー中間子型レプトンとバリオン(またはクォーク)が個別に保存することを保証するために, 既知の電子型レプトンとミュー中間子型レプトンとクォークは全てゲー

ジ群の別の表現に属すると考える．この仮定のもとで，ゲージ群の構造については 2，3 の可能性しかない．

最初に電子型レプトン場を考える．知られている限りでは，これらは電子場 e の左手成分と右手成分，

$$e_L = \tfrac{1}{2}\,(1+\gamma_5)e\,, \qquad e_R = \tfrac{1}{2}\,(1-\gamma_5)e \tag{21.3.1}$$

および純粋な左手成分の電子ニュートリノ場 ν_{eL}，

$$\gamma_5\nu_{eL} = \nu_{eL} \tag{21.3.2}$$

だけから成る．ゲージ群の任意の一つの表現に属する場は全て同じローレンツ変換性を持たなければならないので，ゲージ群の表現は左手成分の 2 重項 (ν_{eL}, e_L) と右手成分の 1 重項 e_R に分かれる.* すると，可能な最も大きなゲージ群は，

$$SU(2)_L \times U(1)_L \times U(1)_R$$

であり，この群のもとで場は，

$$\delta\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix} = i\left[\vec{\epsilon}\cdot\vec{t} + \epsilon_L t_L + \epsilon_R t_R\right]\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix} \tag{21.3.3}$$

と変換する．ここで生成子は，

$$\vec{t} = \frac{g}{4}(1+\gamma_5)\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}, \tag{21.3.4}$$

$$t_L \propto (1+\gamma_5)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{21.3.5}$$

$$t_R \propto (1-\gamma_5) \tag{21.3.6}$$

* もし電子型レプトン数を変えるゲージ結合を許すなら，ゲージ群の一つの表現に ν_{eL} と e_L に加えて左手成分 $\overline{e_R}$ を含めることが可能だ．これは電弱理論の初期の $SO(3)$ 版[6]の基本だったが，以来これは実験的に排除されている．

で与えられる．ただし g は後で選ぶ定数だ．t_L と t_R の代わりに生成子，

$$y \equiv g' \left[\left(\frac{1+\gamma_5}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right] \tag{21.3.7}$$

と

$$n_e \equiv g'' \left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right] \tag{21.3.8}$$

を考えるのが便利だ．ここで g' と g'' は g と同様な後で選ぶ定数だ．生成子 y と t_3 は，物理で特別な役割を果たす線形結合で現れる．それは電荷だ．

$$q = e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{g} t_3 - \frac{e}{g'} y \, . \tag{21.3.9}$$

また，n_e は電子型レプトン数だ．ベータ崩壊のように電荷を変える弱い相互作用と電磁相互作用の両方を理論に含めたいので，$\vec{t}$ と y に結合するゲージ場 $\vec{A}^\mu$ と B^μ の存在を仮定する．さらに，t_L と t_R の残った 1 個の独立な線形結合に結合するゲージ場を含めたければそうしてもよい．それは電子型レプトン数 (21.3.8) にとることができる．n_e と結合する質量ゼロのゲージ場によって作り出される長距離力については非常に厳しい制限がある．[7] よって弱い相互作用と電磁相互作用に匹敵する強さ g'' で n_e に結合するゲージ場を理論に含めるためには，このゲージ対称性は自発的に破れていると仮定しなければならない．** しかし，そのようなゲージ結合によって生成される弱い相互作用の実験的証拠はない（それを否定する証拠は今では数多くある）ので，

** これは電子型のレプトン数の保存という大域的保存則を破らなくても可能だ．それには，ラグランジアンが電子型のレプトン場のみに作用する大域的位相変換と，電子型のレプトン場に加えてレプトンとは相互作用しないあるスカラー場に作用する局所位相変換の両方について不変だと仮定する必要がある．このスカラー場の真空期待値は局所対称性を破って，大域的対称性を破ることなく n_e に結合するゲージ・ボゾンに質量を与える．

n_e をゲージ群の生成子から除外することにする. するとゲージ群は,[8]

$$G = SU(2)_L \times U(1) \tag{21.3.10}$$

となり, 生成子はそれぞれ (21.3.4) と (21.3.7) で与えられる $\vec{t}$ と y だ. 結合定数 g と g' は, これらの生成子に結合するゲージ場 $\vec{A}^\mu$ と B^μ が正準的に規格化されるように調整される. これらのゲージ場と電子型レプトンのみを含むゲージ不変でくりこみ可能な最も一般的なラグランジアンは, したがって,

$$\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_e = -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu\right)^2 \\ -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2 - \bar{\ell}(\not{\partial} - i\vec{\not{A}}\cdot\vec{t}_L - i\not{B}\,y)\ell \tag{21.3.11}$$

で与えられる. (ここで $SU(2)_L$ と $U(1)$ の構造定数はそれぞれ $C_{ijk} = -i\,g\,\epsilon_{ijk}$ とゼロだという事実を使っている.)

もちろん, 実際には $\vec{t}$ と y に結合する四つのゲージ場のうち, ただ一つの線形結合, 電磁場 A^μ だけが質量ゼロだ. したがって $SU(2)_L \times U(1)$ は電荷 (21.3.9) を生成子とする部分群 $U(1)_{em}$ に自発的に破れていると仮定しなければならない. 対称性が破れる機構の詳細は少し後に考察する. しかし, この機構がどのようなものかにかかわらず, 決まった質量を持つスピン 1 の粒子に対応する正準規格化されたベクトル場は以下の場から成ることがわかる. すなわち電荷 $+e$ で質量 m_W の場,

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1^\mu + i\,A_2^\mu\right), \tag{21.3.12}$$

電荷 $-e$ で同じ質量の別の場,

$$W^{\mu *} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1^\mu - i\,A_2^\mu\right), \tag{21.3.13}$$

電気的に中性で質量がそれぞれ m_Z とゼロで A_3^μ と B^μ との直交す

る線形結合で与えられる二つの場,

$$Z^\mu = \cos\theta\, A_3^\mu + \sin\theta\, B^\mu \tag{21.3.14}$$

$$A^\mu = -\sin\theta\, A_3^\mu + \cos\theta\, B^\mu \tag{21.3.15}$$

つまり,

$$A_3^\mu = \cos\theta\, Z^\mu - \sin\theta\, A^\mu \tag{21.3.16}$$

$$B^\mu = \sin\theta\, Z^\mu + \cos\theta\, A^\mu \tag{21.3.17}$$

の四つの場だ.

破れていない対称性の生成子はここでは電磁的なゲージ不変性だが, 一般的な結果 (21.1.11)–(21.1.12) によると, それは生成子の線形結合で与えられ, その係数はこれらの生成子に結合する正準規格化されたゲージ場を展開したときの対応する質量ゼロの場の展開係数と同じだ. (21.3.16) と (21.3.17) より,

$$q = -\sin\theta\, t_3 + \cos\theta\, y \tag{21.3.18}$$

がわかる. これと (21.3.9) を合わせて,

$$g = -e/\sin\theta\,, \qquad g' = -e/\cos\theta \tag{21.3.19}$$

が得られる. レプトンとゲージ・ボゾンの間の完全な結合は結合定数 g と g' を使って,

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}'_e &= -\overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}} \left[\sum_\alpha \not{A}_\alpha t_\alpha\right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\ &= -\overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, \not{W}(t_{1L} - it_{2L}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \not{W}^*(t_{1L} + it_{2L}) \right. \\ &\quad \left. + \not{Z}\,(t_{3L}\cos\theta + y\sin\theta) + \not{A}(-t_{3L}\sin\theta + y\,\cos\theta)\right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{e}\, \not{W}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e\right) + \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}_e\, \not{W}^{*}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)e\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,\bar{\nu}_e\, \not{Z}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e$$
$$+\frac{(g^2-g'^2)}{2\sqrt{g^2+g'^2}}\,\bar{e}\, \not{Z}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)e$$
$$+g'\bar{e}\, \not{Z}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)e - e\,(\bar{e}\not{A}e) \tag{21.3.20}$$

と表される.

理論を完成させるには, 対称性の破れの機構について何らかの仮定をしなければならない. この機構により $W^{\pm}$ と Z^0 だけでなく電子にも質量を与えたい. くりこみ可能な弱い結合の理論でこれを可能にする唯一の方法は, $\bar{\ell}_R$ と ℓ_L(および $\bar{\ell}_L$ と ℓ_R) に微分無しで結合するスカラー場を導入することだ. すると $SU(2)_L \times U(1)$ 不変性より, スカラーは ℓ_L と同様に $SU(2)_L$ 2 重項だが, y の値, したがって q の値はずらしたものだ. こうして「湯川」結合,

$$\mathcal{L}_{\phi e} = -G_e \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R \;+\; \text{H.c.} \tag{21.3.21}$$

を仮定する. ここで (ϕ^+, ϕ^0) は 2 重項で, それに作用する $SU(2)\times U(1)$ 生成子は行列,

$$\vec{t}^{(\phi)} = \frac{g}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}, \tag{21.3.22}$$

$$y^{(\phi)} = -\,g'/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21.3.23}$$

で表され, 電荷の行列は,

$$q^{(\phi)} = \frac{e}{g}\,t_3^{(\phi)} - \frac{e}{g'}\,y^{(\phi)} = e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21.3.24}$$

となる. 理論に別のスカラー多重項を含める可能性はあるが, しばらくの間はこれが唯一のものだとしよう.

ラグランジアンにスカラー場とゲージ場を含むゲージ不変項を加える必要がある. $SU(2)\times U(1)$ ゲージ不変性, ローレンツ不変性, くりこみ可能性を満たす最も一般的な形は以下のとおりだ.

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left|(\partial_\mu - i\vec{A}_\mu\cdot\vec{t}^{(\phi)} - i\,B_\mu\,y^{(\phi)})\phi\right|^2 - \frac{\mu^2}{2}\,\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}\,(\phi^\dagger\phi)^2\,. \tag{21.3.25}$$

ここで $\lambda>0$ で,

$$\phi \equiv \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} \tag{21.3.26}$$

と定義している. $\mu^2<0$ の場合, 樹木近似の真空期待値がラグランジアンの停留点,

$$\langle\phi\rangle^\dagger\langle\phi\rangle \equiv v^2 = |\mu^2|/\lambda \tag{21.3.27}$$

に存在する. $SU(2)\times U(1)$ ゲージ変換をして常にユニタリー・ゲージに移ることが出来る. このゲージでは $\phi^+=0$ となり, ϕ^0 はエルミートで正の真空期待値を持つ. (これが, (21.3.25) の運動項に通常とは異なる因子 $\frac{1}{2}$ が現れるように複素 2 重項 ϕ を規格化した理由だ. すなわち $\mathrm{Re}\,\phi^0$ は唯一の物理的スカラー場なので, (21.3.25) によりこの場が正準的に規格化された場となる.) ユニタリー・ゲージでは ϕ の成分の真空期待値は,

$$\langle\phi^+\rangle = 0\,, \qquad \langle\phi^0\rangle = v > 0 \tag{21.3.28}$$

となる. するとスカラーのラグランジアン (21.3.25) からベクトル中間子の質量項,

$$-\frac{1}{2}\left|\left(\vec{A}_\mu\cdot\vec{t}^{(\phi)} + B_\mu y^{(\phi)}\right)\langle\phi\rangle\right|^2 = -\frac{1}{2}\left|\left(\frac{g}{2}\,\vec{A}_\mu\cdot\vec{\tau} - \frac{g'}{2}\,B_\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= -\frac{v^2 g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu - \frac{v^2}{8}\left(g^2 + g'^2\right) Z_\mu Z^\mu \tag{21.3.29}$$

が生じる. 期待したとおり, 光子の質量はゼロで, $W^\pm$ と Z^0 は質量,

$$m_W = \frac{v|g|}{2}\,, \qquad m_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \tag{21.3.30}$$

を持つことがわかる. また, (21.3.21) と (21.3.28) から電子は最低次の質量,

$$m_e = G_e v \tag{21.3.31}$$

を持つことがわかる.

今日では $\bar{\nu}_e + e^- \to \bar{\nu}_e + e^-$ のような散乱過程のデータが存在するものの, 電子型レプトンのみの間の反応を調べることは難しい. 精密なデータを得るにはよく調べられているミュー中間子崩壊 $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ 等のミュー中間子型レプトンを含む反応を考える必要がある. 上の模型をミュー中間子型レプトンを含むように拡張するのは容易だ. 単に, (21.3.11) の最後の項および (21.3.21) と同様のラグランジアン項 $\mathcal{L}_\mu$ と $\mathcal{L}_{\phi\mu}$ を付け加えればよい. ただし場 e と ν_e をミュー中間子場 μ^- とミュー中間子ニュートリノ場 ν_μ で置き換え G_e を $G_\mu = G_e(m_\mu/m_e)$ で置き換える. (21.3.20) および e と ν_e を μ と ν_μ で置き換えた対応する項から, 低エネルギーの e 型レプトンと μ 型レプトンの間での W 交換により有効相互作用,

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{m_W^2} \left(\bar{e}\gamma^\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e\right) \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mu\right) + \text{H.c.} \tag{21.3.32}$$

が生じる. これは, ミュー中間子崩壊を良く記述することが知られている有効「$V - A$」理論の相互作用,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{e}\gamma^\lambda\left(1+\gamma_5\right)\nu_e\right)\left(\bar{\nu}_\mu\gamma_\lambda\left(1+\gamma_5\right)\mu\right) + \text{H.c.} \tag{21.3.33}$$

と比較できる. ここで G_F は通常のフェルミ結合定数で, ミュー中間子の崩壊率から値 $G_F = 1.16639(2) \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$ を持つことが知られている. これら二つの表現を比較して,

$$g^2/m_W^2 = 4\sqrt{2}\,G_F \tag{21.3.34}$$

がわかる. これよりただちに, (21.3.30) で与えられる真空期待値 v を決定することができる.

$$v = \frac{2m_W}{g} = \frac{1}{2^{1/4}G_F^{1/2}} = 247\,\mathrm{GeV}\ . \tag{21.3.35}$$

また, (21.3.31) より G_e は非常に小さな値,

$$G_e = \frac{0.511\,\mathrm{MeV}}{247\,\mathrm{GeV}} = 2.07 \times 10^{-6} \tag{21.3.36}$$

を持つことがわかる. (21.3.30) から $m_Z > m_W$ がわかる. g と g' についての情報がなければ, (21.3.30) を使って m_Z と m_W の実際の値を決めることはできない. (21.3.30) と (21.3.19) を使えば, m_Z と m_W を電弱混合角 θ を用いて,

$$m_W = \frac{ev}{2|\sin\theta|} = \frac{37.3\,\mathrm{GeV}}{|\sin\theta|}\ ,$$
$$m_Z = \frac{ev}{2|\sin\theta||\cos\theta|} = \frac{74.6\,\mathrm{GeV}}{|\sin 2\theta|}$$

と表すことができる.

以上は文献 3 で得られた元々の結果だ. もちろん, あらゆる種類の輻射補正が存在し, そのほとんどはこの節ではまだ特定していない理論の詳細に依る. しかしこれ以上の情報無しで簡単に計算できる特別に大きな輻射補正が一つ存在する. 上記の m_W と m_Z の値は e については従来の電荷の定義を使って計算された. しかし, 18.2 節で説明したように, これは $E \gg m_e$ のエネルギーでの過程の計算に使うには正確には適切でない. 代わりに対象としているエネルギーに匹敵する

変化するスケール μ での電荷 e_μ を使う必要がある. 90 GeV 程度の μ では有効微細構造定数 $e_\mu^2/4\pi$ は約 1/129 (μ の精密な値にはほとんど依らない) なので, 上記の m_W と m_Z の値には $\sqrt{137/129}$ をかけなければならず,

$$m_W = \frac{38.4\ \mathrm{GeV}}{|\sin\theta|}\ , \tag{21.3.37}$$

$$m_Z = \frac{76.9\ \mathrm{GeV}}{|\sin 2\theta|} \tag{21.3.38}$$

となる.

θ の値の如何に依らず, これらの質量は大きすぎて 1960 年代や 1970 年代初期に W や Z を検出することは全く期待できなかった. 電弱理論の実験的証拠は代わりに, 理論によって予言される新しい類の弱い相互作用の発見, すなわち Z^0 交換により生成される中性カレント過程[9]から得るしかなかった. 中性カレント過程の最初の発見は 1973 年の泡箱による $\nu_\mu - e^-$ 弾性散乱[10]という純レプトン的過程の検出だった. これらの過程は理論的に取り扱うのは容易だが, 断面積が重心系でのエネルギーの 2 乗に比例するので,[†] 事象の頻度は比較的低い. 純レプトン中性カレント反応を使ってパラメータ $\sin^2\theta$ の相当に精密な値を得ることができたのはそれから何年も後のことだ. 1994 年までには, $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ と $\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$ のような純レプトン的中性カレント過程の研究から, 0.222 ± 0.011 という値が得られ, それより $m_W = 81.5$ GeV と $m_Z = 92.5$ GeV が得られた.

中性カレントの発見以前にすでに, 電弱理論はハドロン・ハドロン間およびハドロン・レプトン間の弱い相互作用と電磁相互作用に拡張されていた. 1960 年代中頃までには, レプトン・ハドロン間で電荷が交換される弱い相互作用の過程は, 低エネルギーでは有効ラグランジ

[†]断面積は G_F^2 に比例するので, それが [エネルギー]$^{-2}$ の次元を持つためには, 何らかのエネルギーの 2 乗に比例しなければならない. 重心系でのエネルギーが電子質量よりはるかに大きいとき, それはこの式に現れることができる唯一のエネルギーだ.

アン,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_e+\bar{\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_\mu\right]J^\lambda \;+\; \text{H.c.} \tag{21.3.39}$$

で良く記述されることがわかっていた. ここで J^λ はハドロン・カレントだ. クォーク模型では, このカレントは J^λ の交換関係と保存則から, クォーク・カレント,

$$J^\lambda=\bar{u}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)d\cos\theta_c+\bar{u}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)s\,\sin\theta_c \tag{21.3.40}$$

と同定することができた. ここで u, d, s はアップ, ダウン, ストレンジの各クォーク場で, θ_c はキャビボ角 (Cabibbo angle)[11] と呼ばれる別の角度だ. $O^{14}\to N^{14*}+e^++\nu_e$ や $K^+\to\pi^0+e^++\nu_e$ 等の過程の実験から, G_F の値は純レプトン過程 $\mu^+\to\bar{\nu}+e^++\nu_e$ で測定されたものとほとんど同じ値を持ち, θ_c の値[12] $\sin\theta_c=0.220\pm0.003$ を与えるとわかった. これより, クォークは別の $SU(2)\times U(1)$ 2 重項,

$$\mathcal{Q}=\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\begin{bmatrix} u \\ d\cos\theta_c+s\,\sin\theta_c\end{bmatrix} \tag{21.3.41}$$

および右手成分の 1 重項を構成し, その y の値はクォークの電荷 $2e/3$ と $-e/3$ を与えるように調整されているとの結論に自然に導かれる. この 2 重項はそれだけでは深刻な困難を生じる. Z^0 ボソンはクォークの中性カレント,

$$\sum_{\mathcal{Q}}\bar{\mathcal{Q}}\gamma^\mu(t_{3L}\cos\theta+y\sin\theta)\mathcal{Q}=\sum_{\mathcal{Q}}\bar{\mathcal{Q}}\gamma^\mu(t_{3L}\sec\theta+q\tan\theta)\mathcal{Q} \tag{21.3.42}$$

と相互作用する. 和は (21.3.41) と同様の全てのクォーク 2 重項 $\mathcal{Q}$ についてとる. 電荷の行列 q はクォーク・フレーバーについて対角的だが, (21.3.41) だけが唯一のクォーク 2 重項なら行列 t_{3L} を含む項は $\bar{s}\gamma^\mu(1+\gamma_5)d$ と $\bar{d}\gamma^\mu(1+\gamma_5)s$ に比例する交差項を含み, $s+\bar{d}\leftrightarrow d+\bar{s}$

や $s+\bar{d} \leftrightarrow \mu^+ + \mu^-$ のような有効 Z 交換相互作用が通常の 1 次の弱い相互作用の強さで生じる. そのような効果が存在すると, K^0 - $\overline{K^0}$ 振動や $K^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 等の過程の反応率が測定値よりも何桁も大きくなってしまう. また, ラグランジアンに中性カレント項がなくても, 荷電カレント (21.3.40) を持つ相互作用 (21.3.39) を含む 1 ループ・ダイアグラムから有効相互作用 $s+\bar{d} \to d+\bar{s}$ が生じ, それは通常の 1 次の弱い相互作用に比べ $\alpha/2\pi$ の程度の因子だけ小さくので, その結果としての K^0 - $\overline{K^0}$ 振動の率はやはりはるかに大きくなりすぎる. この最後の困難を避けるために, J^λ に別の項が存在するという提案がなされた.[13] その項は現代に記法では,

$$\bar{c}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)\left[-d\sin\theta_c + s\cos\theta_c\right] \tag{21.3.43}$$

と表される. ここで c は u と同様の電荷 $2e/3$ を持った 4 番目のクォークだ. (21.3.43) を (21.3.40) に加えると, 荷電カレントは,

$$J^\lambda = (\bar{u}\cos\theta_c - \bar{c}\sin\theta_c)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)d$$
$$+(\bar{u}\sin\theta_c + \bar{c}\cos\theta_c)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)s$$

と書くことができる. W とこのカレントの相互作用がストレンジネスを保存しない唯一の理由は, c と u が異なる質量を持ち, $u\cos\theta_c - c\sin\theta_c$ と $u\sin\theta_c + c\cos\theta_c$ の間の遷移が生じるからだ. しかしこれは, 有効相互作用 $s+\bar{d} \to d+\bar{s}$ への 1 ループ・ダイアグラムの寄与が ($m_u \ll m_c$ のために) 余分な因子 m_c^2/m_W^2 だけ小さくなることを意味し, その結果 K^0 - $\overline{K^0}$ 振動の率は実験と一致する大きさになる.

続いて, これによりストレンジネスを変える Z^0 相互作用の問題も解決することが指摘された.[14] $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論においては $-d_L\sin\theta_c + s_L\cos\theta_c$ の組み合わせは 1 重項ではありえず, 別の 2 重項,

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\begin{bmatrix} c \\ -d\,\sin\theta_c + s\,\cos\theta_c \end{bmatrix} \tag{21.3.44}$$

の部分でなければならない. 弱い相互作用の中性カレント (21.3.42) にこの 2 重項を含めると, $\bar{s}\gamma^\mu(1+\gamma_5)d$ と $\bar{d}\gamma^\mu(1+\gamma_5)s$ に比例するストレンジネスを保存しない項は相殺し, K^0 - $\overline{K^0}$ 振動や $K^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 等の過程への Z の寄与が大きすぎる問題はなくなる. c クォークを c – $\bar{c}$ の束縛状態として含む粒子は1974 年に発見され,[15] c クォークの質量は $m_c \approx 1.5$ GeV であることがわかった.[††] これでクォークとレプトンの 2 世代が完成した. すなわち (u, d) クォーク 2 重項およびそれと混合した (c, s) クォーク 2 重項, さらに 2 個のレプトン 2 重項 (ν_e, e) と (ν_μ, μ) だ.

第 3 世代の最初の兆候は 3 番目の荷電レプトン[16] τ の発見だった. その後で, 電荷 $-e/3$ と質量約 4.5 GeV を持つ第 5 番目のクォーク b が発見された.[17] すると電荷 $2e/3$ を持つ 6 番目のクォーク t が理論的に必要となり, 長い期間をおいてそれも発見された.[18] その質量は 1995 年の文献値では 181 ± 12 GeV だ.[19] 今日では (21.3.39) のハドロン・カレント J^λ は,

$$J^\lambda = \overline{\begin{bmatrix} u \\ c \\ t \end{bmatrix}} \gamma^\lambda(1+\gamma_5)\, V \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \tag{21.3.45}$$

と表される. ここで V は完全にはわかっていない 3×3 行列で, これは小林・益川行列[20]と呼ばれている. $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論では, これは三つのクォーク 2 重項,

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \begin{bmatrix} u \\ V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \end{bmatrix}, \tag{21.3.46}$$

[††] クォークは単独では観測されないので, その質量は正確には定義されない. ここで引用した c クォークの質量は, $J-\psi$ 粒子を $c-\bar{c}$ の束縛状態と解釈して, その質量の約半分だ. b クォークと t クォークは非常に重いのでそれらの質量は, 若干の不定性はあるものの, それらを含むハドロンの質量から知ることができる.

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\begin{bmatrix} c \\ V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \end{bmatrix}, \tag{21.3.47}$$

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\begin{bmatrix} t \\ V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \end{bmatrix} \tag{21.3.48}$$

の存在を意味する.

これはちょうど三つのクォーク 2 重項について一般的な根拠から自然に期待されるものになっているということは重要だ. スカラー 2 重項 ϕ_n とクォークとのくりこみ可能で $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 不変な相互作用で最も一般的なものは,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi = &-\sum_{ijn} G^n_{ij}\overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} \phi^0_n \\ \phi^-_n \end{pmatrix} U_{jR} \\ &-\sum_{ijn} H^n_{ij}\overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} -\phi^{-\dagger}_n \\ \phi^{0\dagger}_n \end{pmatrix} D_{jR} + \text{H.c.}\end{aligned} \tag{21.3.49}$$

の形のものだ. ここで U_i と $D_i(i=1,2,3)$ はそれぞれ電荷 $2e/3$ と $-e/3$ の 3 個の独立なクォーク場で, L と R はクォーク場の左手成分と右手成分を表し, G^n_{ij} と H^n_{ij} は未知の定数だ. 中性スカラーの真空期待値はクォークの質量項,

$$\mathcal{L}_m = -\sum_{ij}\overline{U_{iL}}\,m^U_{ij}\,U_{jR} - \sum_{ij}\overline{D_{iL}}\,m^D_{ij}\,D_{jR} + \text{H.c.} \tag{21.3.50}$$

を生じる. ここで,

$$m^U_{ij} = \sum_n G^n_{ij}\langle\phi^0_n\rangle_{\text{VAC}}\,, \qquad m^D_{ij} = \sum_n H^n_{ij}\langle\phi^0_n\rangle^*_{\text{VAC}} \tag{21.3.51}$$

と定義している. 行列 m^U_{ij} と m^D_{ij} には何の制限も無く, 特に複素非対角行列であってもよい. その場合には, パリティとフレーバーが保存しない項が $\mathcal{L}_m$ に現れる. しかし, 新しいクォーク場 $U'_R = A^U_R U_R$, $U'_L = A^U_L U_L$, $D'_R = A^D_R D_R$, $D'_L = A^D_L D_L$ を導入することができる.

ここで A は, 運動項 (19.4.1) の形を保つためにユニタリーでなければならないという条件だけがついた 3×3 行列だ. すると質量項はプライムのついたクォーク場で書き換えたときに同じ形のままだが, 行列 m^U と m^D は,

$$m^{U\prime} = A_L^U m^U A_R^{U\dagger}\,, \qquad m^{D\prime} = A_L^D m^D A_R^{D\dagger} \tag{21.3.52}$$

で置き換えられる. 一般的な定理として, 任意の行列 m について, AmB が実対角行列になるようにユニタリー行列 A と B を選ぶことが可能だ. (極分解定理よりエルミート行列 H とユニタリー行列 U を使って $m=HU$ と書き, H を対角化するユニタリー行列 S を用いて $A=S^\dagger$, $B=U^\dagger S$ ととればよい.) したがって A は, $m^{U\prime}$ と $m^{D\prime}$ が実で対角的になるように選ぶことができ, その場合は, クォーク場 u, c, t, d, s, b は $U'_L+U'_R$ と $D'_L+D'_R$ の成分と同定すべきだ. 弱い相互作用の 2 重項は今や,

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} (A_L^{U\,-1}U'_L)_i \\ (A_L^{D\,-1}D'_L)_i \end{pmatrix}$$

と書かれる. しかし 2 重項を線形結合 $A_L^U Q_L$ ととることもまた可能だ. この線形結合の上成分は, 決まった質量を持つ電荷 $2e/3$ のクォーク u, c, t だ. この場合, これらの 2 重項は (21.3.46)–(21.3.48) で,

$$V = A_L^U A_L^{D\,-1} \tag{21.3.53}$$

と置いた形をとる.

小林・益川行列の成分の絶対値の現在(1995 年)の最良の値は,[20a] 90% の信頼率で,

$$\begin{pmatrix} 0.9745-0.9757 & 0.219-0.224 & 0.002-0.005 \\ 0.218-0.224 & 0.9736-0.9750 & 0.036-0.046 \\ 0.004-0.014 & 0.034-0.046 & 0.9989-0.9993 \end{pmatrix}$$

となっている. ここで行の指標は u, c, t, 列の指標は d, s, b だ.

u, d, c, s クォークで構成される 2 個のクォーク 2 重項のみしか存在しないと仮定すると, 全ての V_{ij} が実になるようにクォーク場の位相を選ぶことが可能で,‡ したがって V 行列は直交行列となり, 2 重項 (21.3.46) と (21.3.47) は (b を落として) それぞれ (21.3.41) と (21.3.44) の形をとる. この場合にはゲージ相互作用は自動的に T と CP を保存する. 第 3 世代の非常に重要な点は, もはや V 行列が実になるようにクォークの位相を調節することが常に可能だというわけではなく, したがってゲージ相互作用が T と CP の保存を破ることが可能なことだ. しかし未知の理由により, 第 3 世代を第 1・第 2 世代と結びつける要素 $V_{ub}, V_{cb}, V_{td}, V_{ts}$ は全て非常に小さく, したがって第 1・第 2 世代の物理は第 3 世代の存在による影響をほとんど受けない. これにより, キャビボの仮定 (21.3.40) が非常に良くまた T と CP の保存則の破れが非常に小さい理由が幾分自然に説明される. T と CP の保存則は, スカラー・ボゾンの 2 重項が二つ以上あればそれらの相互作用によっても破れることが可能だ.[20b] この場合, スカラー 2 重項は軽いクォークには弱く結合するので, T と CP の保存則の破れは小さいと期待される. これら二つの機構のうちどちらが, 3.3 節で議論した K_2^0 崩壊での T と CP の保存則の破れの原因なのかはまだわかっていない.

ニュートリノ・核子の深非弾性散乱等のハドロンを含む中性カレント過程は純レプトン過程 $\nu_\mu + e \to \nu_\mu + e$ の検出のすぐ後, 1973 年[21]に発見された. この場合には標的粒子の質量がずっと大きいので, まもなく, 多数の事象を観測しそれを使って電弱理論を確証しそのパラメータを測定することが可能になった. レプトン・ハドロン間の中性

‡ V_{ud} と V_{us} が実になるように d と s の位相を調節する. するとユニタリー性より V_{cd} と V_{cs} は同じ位相を持たなければならず, その位相は c の位相を調節してゼロにすることができる.

カレント相互作用についての別の情報が原子物理におけるパリティの破れの観測から得られた. 1983 年までに全ての $\sin^2\theta$ の直接測定は矛盾がなくなっており, それらを組み合わせた値 $\sin^2\theta = 0.23$ が得られ, $m_W = 80.1\,\mathrm{GeV}$ と $m_Z = 91.4\,\mathrm{GeV}$ の予言がなされた. そして 1983 年に W が発見され, 引き続いて Z が発見された.[22] その質量の測定値は現在 (1995 年時点で),

$$m_W = 80.410 \pm 0.180\ \mathrm{GeV}^{23}\ , \quad m_Z = 91.1887 \pm 0.0022\ \mathrm{GeV}^{24}$$

と電弱理論の予言と満足のいく一致を示している.

Z の質量測定の非常に高い精度は, LEP (セルンの大電子陽電子衝突型加速器) と SLC (スタンフォード線形衝突型加速器) で $e^+ - e^-$ 衝突のエネルギーを Z 共鳴に合わせることで得られたものだが, そのお陰で電弱データの解析方法が変わった. W と Z の質量の予言値を測定値と比較する代わりに, ミュー中間子崩壊率から (α の次数の輻射補正を含めて) 求めたフェルミ結合定数 $G_F = 1.16639(2) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$ および 18.2 節で述べたように低エネルギーでの測定から外挿した微細構造定数 $\alpha(m_Z) = (128.87 \pm 0.12)^{-1}$ とともに, Z の質量を実験からの入力と考えるようになっている. このようにして $\sin^2\theta$ は導出される量となる. (21.3.38) で定義するとその値は $\sin^2\theta = 0.2312 \pm 0.003$ となる. これらを入力として, 電弱理論を使って m_W 等の他の量を, 電弱輻射補正を考慮することが必要になるほど十分な精度で予言できる.[25] 1 ループの次数でこれらの輻射補正は t クォークとスカラー (「ヒッグス」)・ボゾンの質量を含み, したがってこれらの質量を予言するのに使うことができる. 例えば, トップ・クォークが発見される以前に理論と実験の一致からこれらの輻射補正に制限が加わり, その結果トップ・クォークの質量は 130–200 GeV[26] の範囲だと予言された. この値はその後実験的に発見された値と一致している. W の質量は (1994 年には) 80.29 GeV と予言された. これには, 入力の m_Z, G_F,

$\alpha(m_Z)$ の不定性から来る ±0.02 GeV の不定性と, m_t および m_{Higgs} の可能な値の範囲から来る ±0.11 GeV の不定性がある. 1995 年のある研究[27] では $m_{\text{Higgs}} < 225$ GeV と結論されている. セルンの LEP 2 の電子・陽電子衝突型加速器で期待される m_W の精密測定により m_{Higgs} の有用な評価が可能になるだろう.

* * *

電弱理論の場の内容と $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性を持つ最も一般的なくりこみ可能なラグランジアンは自動的にバリオン数とレプトン数を保存する. これはゲージ相互作用と裸の質量項については明らかに正しい. なぜならクォーク, 反クォーク, レプトン, 反レプトンは全て $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の異なる表現に属するからだ. スカラーが全て $SU(3)$ に関して中性で $SU(2)$ の 2 重項であり $U(1)$ 量子数 ±1/2 を持つなら, スカラーとフェルミオン・反フェルミオンとのくりこみ可能な唯一の相互作用はクォーク・反クォーク対およびレプトン・反レプトン対との相互作用で, それはもちろんバリオン数とレプトン数を保存する. (ほとんど同様にして, レプトンと相互作用する荷電ハドロン・カレントは必然的に 19.7 節で述べた自発的に破れた $SU(3) \times SU(3)$ 対称性にともなうカレントの線形結合となることがわかる. それはこの破れた対称性に関する最初の研究での説明を知らずに仮定された.)

これらの結果は標準模型がくりこみ可能だという仮定に決定的に依っている. しかし繰り返し強調しているように, 標準模型のくりこみ可能なラグランジアンには次元 $d > 4$ を持ちある非常に大きな質量 M の $4-d$ 次の冪で抑えられている非くりこみ可能な項が伴っていることが期待される. くりこみ可能な標準模型の予言に対する主要な補正は4 を越える最も小さな可能な次元を持つ項から来る.

標準模型のフェルミオンと他の場から構成できる次元 5 でローレン

ツ不変な唯一の項はせいぜいフェルミオン場について双 1 次で, また 2 個のスカラーか, 1 個のスカラーと 1 個のゲージ不変な微分か, あるいはスカラーは無しで 2 個のゲージ不変な微分(それらの交換子, すなわち場の強度テンソルを含めて)かを含む. カラー $SU(3)$ 不変性より, そのような相互作用でのフェルミオン場はクォーク・反クォーク双 1 次式かレプトン場や反レプトン場の対として現れ, その全ての演算子はバリオン数を保存する. そのような項は非常にたくさんあるが, レプトン数の保存を破るには2 個のレプトン場の積かまたはその共役場の積を含まなければならない. 左手成分のレプトン 2 重項 (ℓ^-_{Li}, ν_i) と右手成分の荷電レプトン 1 重項 ℓ^-_{Ri} $(i = e,\ \mu,\ \tau)$ はそれぞれ $U(1)$ 量子数 1/2 と +1 を持ち, 他方スカラー 2 重項(あるいは複数の 2 重項) (ϕ^+, ϕ^0) は$U(1)$ 量子数 −1/2 を持つ. したがって, 二つの左手成分レプトン 2 重項と二つのスカラー 2 重項から $U(1)$ 不変な次元 5 の相互作用を作ることができる. スカラー 2 重項が 1 種類しかないとすると, そのような項で $SU(2)$ 不変性とローレンツ不変性を満たすものは,[27a]

$$\sum_{ij} f_{ij}(\overline{\ell^c_{Li}}\phi^+ - \overline{\nu^c_i}\phi^0)(\ell_{Lj}\phi^+ - \nu_j\phi^0) \tag{21.3.54}$$

だけだ. ここで i と j はレプトンのフレーバーの添字で, c は荷電共役場を表す. 電弱対称性の破れのスケールより低いエネルギーでは, これは有効相互作用,

$$\sum_{ij} f_{ij}\,\overline{\nu^c_i}\nu_j\,\langle\phi^0\rangle^2 \tag{21.3.55}$$

を生じる. f_{ij} は $1/M$ の次数で, 多分小さな結合定数がかかっていると期待されるので, これはせいぜい $(300\ \mathrm{GeV})^2/M$ 程度のレプトン数を保存しないニュートリノ質量を与える. 21.5 節で見るように M は $10^{15} - 10^{18}$ GeV の程度と期待され, したがってニュートリノの質量は $10^{-4} - 10^{-1}$ eV の程度か, あるいは小さな結合定数がかかっていれば

それ以下だと期待される. そのような質量は小さすぎて直接測定することは難しいが, ニュートリノの質量行列が対角的だという理由はないので, ニュートリノの質量は長い飛行中にある型から別の型への振動で検出されるかもしれない.

同様の解析から, バリオン数とレプトン数の保存を両方とも破る次元 6 で 3 個のクォーク場と 1 個のレプトン場を含む相互作用が存在することがわかる.[27c] そのような相互作用は M^{-2} の次数の結合定数を持ち, 陽子崩壊等の過程を引き起こす. その崩壊率は M^{-4} に比例する.

21.4 動的に破れた局所対称性*

ここまでの自発的に破れた局所的対称性の議論は完全に摂動論の範囲内でのものだった. この制限はある程度は避けられない. 自発的に破れた大域的対称性の場合は質量ゼロのゴールドストン・ボゾンの存在と相互作用についての厳密な定理を証明することが可能だが, 局所的対称性の自発的破れの場合にはそのような正確な帰結は存在しない. 質量がゼロでないベクトル・ボゾンの存在でさえ実際は一般的定理ではない. ゲージ結合が十分に強ければこれらの粒子は非常に速く崩壊して一定のスピン $j = 1$ の明確な共鳴としての特性を失う.

一方, e, g, g' 等のゲージ結合が十分小さければ, 自発的に破れた局所対称性を持つ理論は, 厳密な定理が証明できる自発的に破れた大域的対称性を持つ理論に非常に近い. したがってそのようなゲージ理論については, たとえ他の非ゲージ結合が非常に強くても有用な近似的結果を導くことが可能だ. その一例は大きなスカラー自己結合 λ を持つ(したがって (21.3.27) よりスカラーの質量が大きい) 標準的な

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

$SU(2)\times U(1)$ 電弱理論だ. より興味深い可能性は, 電弱対称性の破れが, 新しいフェルミオンの組に作用する新しいゲージ群にともなう強い力によって引き起こされる場合だ. ここでは, 自発的対称性の破れの特定の機構に関係なく, そのような全ての理論で得られる結果を考察する.[28]

ゲージ結合がゼロの極限で, 理論は大域的対称性の群 G のもとで不変で, その対称性は部分群 H に自発的に破れていると仮定する. 19.5 節で述べたように, この場合には理論はゴールドストン・ボゾン場 ξ_a の組と他の物質場 $\tilde{\psi}$ で記述され, ラグランジアンが H 不変で $\tilde{\psi}$ と (19.6.14), (19.6.30) 等で与えられる共変微分 $D_{a\mu}$, $D_\mu\tilde{\psi}$ 等だけから作られていればラグランジアンは G 不変だ.

ここでゲージ結合の「スイッチを入れる」. ゲージ群 $\mathcal{G}$ はもちろん理論の全対称性である群 G の部分群でなければならない. また G が自発的に H に破れるとき $\mathcal{G}$ は, $\mathcal{G}$ と H の共通部分に等しい部分群 $\mathcal{H}$ に自発的に破れなければならない. ゲージ群 $\mathcal{G}$ の生成子 $\mathcal{T}_\alpha$ は全体の群 G の生成子 T_A の線形結合として,

$$\mathcal{T}_\alpha = \sum_A e_{\alpha A} T_A \tag{21.4.1}$$

と表せる. ここで係数 $e_{\alpha A}$ すなわちゲージ結合は非常に小さくとられる. 添字 A は破れていない対称性の生成子 t_i と破れた対称性の生成子 x_a の指標 i, a についてとる. (ここでは生成子 T_A は従来のやり方で規格化されている. つまり, 1 の程度の大きさの要素を持つ行列で表される. 特に, $\mathcal{T}_\alpha$ と異なり x_a と t_i の構造定数は結合定数の因子を含まない.)

基礎にある理論で G 不変性が線形実現している場合には, ゲージ場 $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ と他の場 ψ との結合を導入するには通常の微分をゲージ共変

微分,

$$\left(\partial_\mu - i\sum_\alpha \mathcal{T}_\alpha \mathcal{A}_{\alpha\mu}\right)\psi = \left(\partial_\mu - i\sum_A T_A A_{A\mu}\right)\psi \tag{21.4.2}$$

で置き換えればよい. ここで,

$$A_{A\mu} \equiv \sum_\alpha e_{\alpha A}\mathcal{A}_{\alpha\mu} \tag{21.4.3}$$

とした. 結果として得られる理論は, 場が,

$$\psi \to g\psi\,, \tag{21.4.4}$$

$$\sum_A T_A A_{A\mu} \to g\left(\sum_A T_A A_{A\mu}\right)g^{-1} - i(\partial_\mu g)g^{-1} \tag{21.4.5}$$

と変換する形式的な局所変換のもとで不変だ. ここで $g(x)$ は時空に依存する群 G の任意の元だ. これは純粋に形式的な不変性だ. なぜなら, 変換 (21.4.5) は一般に線形結合 (21.4.3) の形を保持しないという事実からわかるように, 一般にゲージ結合は実際に G を破っているからだ. それにもかかわらず, しばらくの間 (21.4.3) については忘れて, A^μ_A を拘束のない古典的な外場として取り扱い, 物質場およびそれとゲージ場との相互作用のラグランジアンの構造をそれが局所変換 (21.4.4), (21.4.5) のもとで不変だと要求して解析する. このようにして, ラグランジアンが真の局所対称部分群 $\mathcal{G}$ のもとで(さらに $e_{\alpha A} \to 0$ としたときにはもっと大きな大域的対称性の群 G のもとで)不変なことと, カレント, すなわち物質場の作用の $\mathcal{A}^\mu_\alpha$ についての汎関数微分, が破れた大域的対称性 G のもとで正しく変換することの両方が保証される. 後で, A^μ_A を (21.4.3) の形に制限し, 場 $\mathcal{A}^\mu_\alpha$ を量子場として扱い, この場のラグランジアンの適切な運動項を与える.

不変群 G が破れて部分群 H になることの意味を明らかにするために, 19.6 節と同じように議論を進める. まず ψ と A を新しい場 $\tilde{\psi}$, $\tilde{A}$,

$$\tilde{\psi} = \gamma^{-1}(\xi)\psi\,, \tag{21.4.6}$$

$$\tilde{A}^{\mu}_{A} = \sum_{B} D_{AB}\Big(\gamma^{-1}(\xi)\Big)\, A^{\mu}_{B} \tag{21.4.7}$$

で置き換える. ここで $\gamma(\xi)$ は ψ のゴールドストン・ボゾンの自由度を取り除く標準的な G 変換で, $D(g)$ はゲージ場が持つ G の表現だ.

$$g\, T_A\, g^{-1} = \sum_{B} D_{BA}(g)\, T_B\ . \tag{21.4.8}$$

これらのゴールドストンの自由度は, 時空に依存するパラメータ ξ_a に再度現れる. $\gamma(\xi)$ はこのパラメータに依存する. 19.6 節と同じ計算から, 局所的変換と大域的変換の両方について, 変換則 (21.4.4) は変換,

$$\xi^a \to \xi^{a'} = f^a(\xi, g)\ , \tag{21.4.9}$$

$$\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}' = h(\xi, g)\tilde{\psi} \tag{21.4.10}$$

に置き換わる. ここで h と f は, h を破れていない部分群 H の元として,

$$g\,\gamma(\xi) = \gamma(f(\xi, g))\, h(\xi, g) \tag{21.4.11}$$

で定義される. また $\tilde{A}^{\mu}_{A}$ の変換則も導出する必要がある. (21.4.5) より, これらの局所変換のもとで (21.4.2) のゲージ場の線形結合は,

$$\sum_{A} T_A A_{A\mu} \to \sum_{A} T_A A'_{A\mu} = g\ \left[\sum_{A} T_A A_{A\mu} - i\, g^{-1}\partial_\mu g\right]\, g^{-1}$$

と変換する. 左と右からそれぞれ $\gamma^{-1}(\xi')$ と $\gamma(\xi')$ をかけ, (21.4.7), (21.4.8), (21.4.11) を使うと, これは,

$$i\sum_{A} T_A \tilde{A}'_{A\mu} = h(\xi, g)\left[i\sum_{A} T_A \tilde{A}_{A\mu} + \gamma^{-1}(\xi)[g^{-1}\partial_\mu g]\gamma(\xi)\right] h^{-1}(\xi, g) \tag{21.4.12}$$

と書ける. 非斉次項 $g^{-1}\partial_\mu g$ を相殺する方法を見るには, (21.4.11) を微分して左からその逆をかけると,

$$\gamma^{-1}(\xi')\partial_\mu \gamma(\xi') = h(\xi, g)\gamma^{-1}(\xi)[g^{-1}\partial_\mu g]\gamma(\xi) h^{-1}(\xi, g)$$

$$+h(\xi,g)[\gamma^{-1}(\xi)\partial_\mu\gamma(\xi)]h^{-1}(\xi,g)$$
$$+h(\xi,g)\partial_\mu h^{-1}(\xi,g) \tag{21.4.13}$$

が得られることに留意する. よって非斉次項を相殺するには, (21.4.13) から (21.4.12) を引かなければならない.

$$\gamma^{-1}(\xi')\partial_\mu\gamma(\xi') - i\sum_A T_A\tilde{A}'_{A\mu}$$
$$= h(\xi,g)\left[\gamma^{-1}(\xi)\partial_\mu\gamma(\xi) - i\sum_A T_A\tilde{A}_{A\mu}\right]h^{-1}(\xi,g)$$
$$-\left[\partial_\mu h(\xi,g)\right]h^{-1}(\xi,g)\ . \tag{21.4.14}$$

したがって, 新しいゲージ共変量 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ を,

$$\sum_a i\,\mathcal{D}_{a\mu}x_a + \sum_i i\mathcal{E}_{i\mu}t_i \equiv \gamma^{-1}(\xi)\partial_\mu\gamma(\xi) - i\sum_A T_A\tilde{A}_{A\mu} \tag{21.4.15}$$

で定義する. これらの量は以下の変換性を持つ.

$$\mathcal{D}_{a\mu} \to \mathcal{D}'_{a\mu}\ , \qquad \mathcal{E}_{i\mu} \to \mathcal{E}'_{i\mu} \tag{21.4.16}$$

ここで (19.6.26) および (19.6.27) とちょうど同じように,

$$\sum_a \mathcal{D}'_{a\mu}x_a = h(\xi,g)\left(\sum_a \mathcal{D}_{a\mu}x_a\right)h^{-1}(\xi,g)\ , \tag{21.4.17}$$

$$\sum_a \mathcal{E}'_{i\mu}t_i = h(\xi,g)\left(\sum_i \mathcal{E}_{i\mu}t_i\right)h^{-1}(\xi,g) + i\Big(\partial_\mu h(\xi,g)\Big)h^{-1}(\xi,g)\ , \tag{21.4.18}$$

と定義した. $\mathcal{E}$ を使って物質場の完全に共変な微分,

$$\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi} = \partial_\mu\tilde{\psi}\ +\ i\sum_i t_i\mathcal{E}_{i\mu}\tilde{\psi} \tag{21.4.19}$$

や $\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$ 等のもっと高次の微分を構成できる. (21.4.12) の非斉次項があるために, $\tilde{A}_{A\mu}$ あるいは (21.4.19) のような $\tilde{A}_{\alpha\mu}$ の共変微分

をラグランジアンに自由に導入することはできない. しかし, 局所的な $\mathcal{G}$ 変換と大域的な G 変換の両方のもとで共変的に変換する「回転 (curl)」を構成することは容易にできる. それは,

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \equiv \sum_B D_{AB}\Big(\gamma^{-1}(\xi)\Big)\left(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu} - \sum_{CD} C_{BCD} A_{C\mu} A_{D\nu}\right) \tag{21.4.20}$$

で与えられる. この量は形式的な局所 G 変換のもとで,

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \to \tilde{F}'_{A\mu\nu} = \sum_B \mathcal{D}_{AB}\Big(h(\xi,g)\Big)\tilde{F}_{B\mu\nu} \tag{21.4.21}$$

と変換する. したがって, ラグランジアンは, $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_{a\mu}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$, $\tilde{F}_{A\mu\nu}$, およびもっと高次の共変微分の任意関数で大域的 H 不変性を満たすように構成すれば, 形式的な局所 G 変換のもとで不変だ.

ここで現実に戻って, A^μ_A を制限された形 (21.4.3) の量子場として取り扱う. (21.4.15) と (21.4.20) は,

$$\begin{aligned} &\sum_a i\,\mathcal{D}_{a\mu} x_a + \sum_i i\mathcal{E}_{i\mu} t_i \\ &= \gamma^{-1}\partial_\mu\gamma(\xi) - i\sum_{AB\alpha} T_A\, D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) e_{\alpha B}\mathcal{A}_{\alpha\mu} \end{aligned} \tag{21.4.22}$$

および,

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} = \sum_{B\alpha} D_{AB}\Big(\gamma^{-1}(\xi)\Big) e_{\alpha B}\,\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} \tag{21.4.23}$$

となる. ここで,

$$\mathcal{F}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_{\beta\nu} - \partial_\nu\mathcal{A}_{\beta\mu} - \sum_{\gamma\delta}\mathcal{C}_{\beta\gamma\delta}\mathcal{A}_{\gamma\mu}\mathcal{A}_{\delta\nu} \tag{21.4.24}$$

と定義した. ただし, $\mathcal{C}_{\beta\gamma\delta}$ はゲージ群の構造定数で, G の構造定数と,

$$\sum_{CD} C_{BCD}\, e_{\gamma C}\, e_{\delta D} = \sum_\beta \mathcal{C}_{\beta\gamma\delta}\, e_{\beta B} \tag{21.4.25}$$

で関係している. ラグランジアンにこの場の運動項として通常の項,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha}\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu} \tag{21.4.26}$$

を含める. ここで $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ の線形変換および対応して $e_{\alpha A}$ の線形変換により, $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}\mathcal{F}_{\beta}{}^{\mu\nu}$ の係数がちょうど $\delta_{\alpha\beta}$ になるようにした. $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$ の線形項はちょうど $\partial_\mu\mathcal{A}_{\alpha\nu} - \partial_\nu\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ なので, (21.4.26) は $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ を正準規格化されたベクトル場にする効果がある. したがって有効ラグランジアン密度は大域的 H 変換のもとで不変な $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_{a\mu}$ の関数と, 2 個以上の $e_{\alpha A}$ の因子に比例する係数を持ち, $\mathcal{G}$ を保存するが G は保存しない可能な項の和だ.

次に以上の構成要素からどのような種類の摂動論が構成できるかを見てみよう. $e_{\alpha A} \to 0$ の極限でゲージ・ボゾンは, 自発的対称性の破れを被る物質場との結合が切れるので, 質量ゼロになる. したがってとりあえず $e_{\alpha A}$ が小さいときそれらの質量は eM の程度の大きさだと考えておく. ここで e は $e_{\alpha A}$ の典型的な値で (生成子 T_A は 1 の程度の大きさの構造定数を持つように規格化されている), M は自発的対称性の破れを生じる力学に典型的なエネルギーのスケールだ. ここで, エネルギーまたは運動量が $Q \lesssim eM$ のゲージ・ボゾンとゴールドストン・ボゾンを含む一般的なファインマン・ダイアグラムを考える. ただし, それより大きなエネルギーまたは運動量を持つ全ての粒子とそれらより重い全ての物質場の粒子は有効場理論の結合定数への補正として埋め込まれているとする. ここでの摂動論は e と Q/M についての冪展開だ. 19.4–6 節と同じ解析に従うと, 任意のそのようなダイアグラムの e と Q/M の冪の総数は,

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + e_i - 2) + 2L + 2 \tag{21.4.27}$$

だ. ここで V_i は型 i の頂点の数, d_i と e_i はそれぞれ型 i の相互作用での微分の数と因子 $e_{\alpha A}$ の数, また L はループの数だ. (21.4.3) の拘

束があると, 場 $A_{A\mu}$ または $\tilde{A}_{A\mu}$ からはe の因子 1 個の寄与がある. (21.4.15) からわかるように, 各ゴールドストン・ボゾン共変微分 $\mathcal{D}_{a\mu}$ からは d_i+e_i に +1 の寄与があり, (21.4.19) と (21.4.15) からわかるように, その他の共変微分 $\mathcal{D}_{a\mu}$ の各々からは d_i+e_i に別の +1 の寄与がある. ラグランジアンの全ての可能な項は $d_i+e_i\geq 2$ を持つので, 主要な寄与は $d_i+e_i=2$ の相互作用ばかりで構成される樹木ダイアグラム ($L=0$) から来る. 唯一のそのような相互作用はゴールドストン・ボゾンの運動項,

$$\mathcal{L}=-\tfrac{1}{2}\sum_{ab}F_{ab}^2\mathcal{D}_{a\mu}\mathcal{D}_b{}^{\mu} \tag{21.4.28}$$

とヤン・ミルズ項 (21.4.26), および $e_{\alpha A}$ について 2 次で対称性を破る可能な非微分項だ.

場 ξ_a の物理的意味を見るには, $\mathcal{D}_{\alpha\mu}$ の線形項が,

$$(\mathcal{D}_{a\mu})_{\rm LIN}=\partial_\mu\xi_a-\sum_\alpha e_{\alpha a}\mathcal{A}_{\alpha\mu} \tag{21.4.29}$$

となっていることに気付けばよい. この章の補遺に示しているように, 全ての α について,

$$\sum_{ab}F_{ab}^2\,\xi_a e_{\alpha b}=0 \tag{21.4.30}$$

を満たし, したがって (21.4.28) の交差項がゼロになる「ユニタリー・ゲージ」をとることが常に可能だ. この条件の意味を明確にするには以下のことに留意すればよい. すなわち, 全ての破れた対称性がゲージ対称性である特別の場合には, どの x_a もゲージ生成子と破れていない生成子の線形結合として,

$$\begin{aligned}x_a&=\sum_\alpha c_{a\alpha}\mathcal{T}_\alpha+\sum_i c_{ai}t_i\\&=\sum_\alpha c_{a\alpha}\left(\sum_a e_{\alpha b}x_b+\sum_i e_{\alpha i}t_i\right)+\sum_i c_{ai}t_i\end{aligned}$$

と書くことができ，したがって，

$$\sum_\alpha c_{a\alpha} e_{\alpha b} = \delta_{ab}$$

となる．(21.4.30) と $c_{\alpha b}$ を縮約すると $\xi_a = 0$ が得られ，このゲージではゴールドストン・ボゾンが全く存在しない．より一般的には，(21.4.30) の条件により，ゲージ対称性に対応しないゴールドストン・ボゾンだけが残る．これらの幾つかはゲージ相互作用によって破れる G の元に付随しており，したがってゲージ結合について 2 次の質量を持つ．これらは擬ゴールドストン・ボゾンと呼ばれる．

ξ がユニタリー・ゲージ条件 (21.4.30) を満たすように選ぶと，ラグランジアン (21.4.28) の 2 次の部分は単に，

$$(\mathcal{L}_\xi)_{\rm QUAD} = -\tfrac{1}{2} \sum_{ab} F^2_{ab} \partial_\mu \xi_a \partial^\mu \xi_b - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu^2_{\alpha\beta} \mathcal{A}_{\alpha\mu} \mathcal{A}_\beta{}^\mu \qquad (21.4.31)$$

となる．ここで，

$$\mu^2_{\alpha\beta} = \sum_{ab} F^2_{ab}\, e_{\alpha a} e_{\beta b} \qquad (21.4.32)$$

と定義した．これは二つの重要な意味を持つ．第一に，ξ_a は正準的に直交規格化された場 π_a を使って，

$$\xi_a = \sum_b F^{-1}_{ab}\, \pi_b \qquad (21.4.33)$$

と表される．ここで F_{ab} は正行列 F^2_{ab} の正の平方根だ．これは，F^{-1}_{ab} が低エネルギーのゴールドストン・ボゾンの放出・吸収に付随する F^{-1}_π に類似の因子だということを示している．第二に，$\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ は正準規格化ベクトル場として定義されているので，(21.4.31) より，$\mu^2_{\alpha\beta}$ がベクトル・ボゾンの質量行列の 2 乗だということがわかる．(21.4.32) はベクトル・ボゾンの質量行列についての普遍的な式で，ゲージ結合については 2 次までのみ正しいが他の全ての相互作用については全

次数で正しい. (21.1.7) に (21.4.1) を使えば, 以前の結果 (21.1.7) は (21.4.32) で,

$$F_{ab}^2 = -\sum_{nml} (x_a)_{nm}(x_b)_{nl} v_m v_l$$

と置いた特別の場合だということが容易にわかる. (21.4.32) は 21.1 節の終わりに (少し異なる記法で) 概説した連続性の議論に基づいて理解することもできる. その議論によれば, ゲージ結合がゼロの極限で生き残るゲージ・ボゾン交換の効果は, ゲージ結合がないときにゴールドストン・ボゾン交換により生じる効果と同じだということが保証される.

一般的に, F_{ab}^2 行列は計算できないが, それは破れていない部分群 H のもとで以下の意味で不変でなければならないということは知っている.

$$\sum_d \left[C_{ibd} F_{dc}^2 + C_{icd} F_{bd}^2 \right] = 0\,.$$

この条件からゲージ・ボゾンの質量 (21.4.32) について有用な制限を課すことができる.

例えば, 電弱ゲージ群 $SU(2) \times U(1)$ が自発的に電磁理論の $U(1)$ に破れる場合を考える. 三つの破れた対称性の生成子 x_a は結合定数因子 g を含まない $SU(2)$ の三つの生成子 (21.3 節では t_1, t_2, t_3 と呼んだ) に, また一つの破れていない生成子は t は因子 e を含まない電荷 q にとることができる. すなわち, x_a と t はレプトン 2 重項にかかるときには行列,

$$\vec{x} = \frac{1}{4}(1+\gamma_5)\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$t = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される. するとゲージの生成子は,

$$\vec{\mathcal{T}} = g\vec{x} \ , \qquad \mathcal{T}_y = g'(x_3 - t) \tag{21.4.34}$$

で与えられる. すなわち, ゲージ生成子 $\mathcal{T}_\alpha$ における x_a の係数 $e_{\alpha a}$ は,

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = g \ , \qquad e_{y3} = g'$$

となる. また, t により 3 元ベクトル $\vec{x}$ は3 軸回りの回転を受けるので, この破れていない対称性から行列 F^2_{ab} はゼロでない成分,

$$F^2_{11} = F^2_{22} \equiv F^2_C \ , \qquad F^2_{33} \equiv F^2_N$$

を持たなければならない. すると, (21.4.32) よりゲージ・ボゾンの質量 2 乗行列はゼロでない成分,

$$\mu^2_{11} = \mu^2_{22} = g^2 F^2_C \ , \qquad \mu^2_{33} = g^2 F^2_N \ ,$$
$$\mu^2_{3y} = g\,g'\,F^2_N \ , \qquad \mu^2_{yy} = g'^2 F^2_N$$

を持つ. その固有値は,

$$m^2_W = g^2 F^2_C \ , \qquad m^2_Z = (g^2 + g'^2) F^2_N \ , \qquad m^2_A = 0 \tag{21.4.35}$$

となる.

さらに話を進めるには, F_C と F_N の関係式が必要だ. もし $g = g' = 0$ の極限で, 理論が $SU(2) \times U(1)$ より大きな大域的対称性の群 G のもとで不変で, その群は自発的に $\vec{x}$ を 3 元ベクトルとして回転させる 3 次元回転を含む部分群 H に破れれば, この関係式が得られる. そのような破れていない対称性は F^2_{ab} が δ_{ab} に比例することを要求し, したがって,

$$F_C = F_N$$

となる. そのような対称性は全て「保護的な(custodial)」対称性と呼ばれる. この結果として m_Z/m_W はゲージ結合を使って 21.3 節で議論した成功を収めている式,

$$m_Z/m_W = \sqrt{1+g'^2/g^2} = 1/\sin\theta \tag{21.4.36}$$

が得られる.

例えば, ゲージ結合がゼロならば, 最も簡単な $SU(2)\times U(1)$ 電弱理論でのスカラー 2 重項 ϕ のラグランジアン (21.3.25) は,

$$(\mathcal{L}_\phi)_{g=g'=0} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - \frac{\mu^2}{2}\,\phi_n\phi_n - \frac{\lambda}{4}(\phi_n\phi_n)^2$$

と書くことができる. ここで,

$$\phi_1 \equiv \mathrm{Im}\phi^+\ ,\quad \phi_2 \equiv \mathrm{Re}\phi^+\ ,\quad \phi_3 \equiv \mathrm{Im}\phi^0\ ,\quad \phi_4 \equiv \mathrm{Re}\phi^0$$

とした. これは「偶然の」大域的 $SO(4)\equiv SU(2)\times SU(2)$ 対称性の群のもとで自動的に不変だ. この群は $\mathrm{Re}\phi^0$ の真空期待値により近似的な破れていない $SO(3)$ の保護的部分群[29]に自発的に破れている. (21.4.36) の結果は, 2 個以上のスカラー 2 重項があっても成り立つ. なぜなら, この場合にはスカラーのラグランジアンの質量項と相互作用項は一般に保護的対称性を保存しないが, 上記の導出に関係するのは運動項だけであり, この項はつねに完全な $SO(4)$ 対称性を持つ.

保護的対称性は他の理論でも見ることができる. 例えばスカラー場は含まないが, テクニカラー相互作用と呼ばれる新しい極めて強いベクトル・ゲージ相互作用[30]を持つ理論を考える. この相互作用は「テクニクォーク」U_r, D_r から成る新しい $SU(2)\times U(1)$ 2 重項 (U_r, D_r) に作用する. ここで r はテクニカラーの添字だ. U_r と D_r の両方の右手成分と左手成分がテクニカラー・ゲージ群のもとで全て同じように変換するかぎり, 電弱結合がゼロの極限で, テクニクォーク 2 重項の右手成分と左手成分を独立に $SU(2)$ 変換する群 $SU(2)\times SU(2)$ のもと

でラグランジアンは不変であろう. 19.9 節で述べた議論に従えば, テクニクォーク 2 重項の右手成分と左手成分の両方の同時 $SU(2)$ 変換から成る部分群 $SU(2)_V$ は自発的に破れることはない. 一方, ちょうどカラー相互作用により量子色力学の (u クォークと d クォークの質量がゼロでの) カイラル $SU(2) \times SU(2)$ 対称性がアイソスピン部分群に自発的に破れるように, テクニカラー相互作用により $SU(2) \times SU(2)$ が $SU(2)_V$ に自発的に破れると考えるのが自然だ. 破れていない $SU(2)_V$ 対称性のもとで電弱生成子 $\vec{x}$ または $\vec{T}$ は 3 元ベクトルとして回転し, この場合も $F_C = F_N$ の関係式が導かれる. その結果 W と Z の質量の関係がうまく予言される.

テクニカラーの考え方は魅力的だ. なぜならそれは, 一般的に (弦理論のように) プランク質量すなわち約 10^{18} GeV の程度と仮定される物理の基本スケールと考えられているものよりはるかに低い特徴的なスケールで電弱理論の対称性を破る自然な機構を与えるからだ. 基本スケールのすぐ下で強い相互作用と電弱相互作用の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ から成る破れていないゲージ群とテクニカラー・ゲージ群がすべて同程度に小さい結合定数で存在すると考えるだけでよい. もしテクニカラーのゲージ相互作用が漸近的自由ならば, QCD のカラー結合のようにテクニカラー結合はエネルギーが下がるとともにゆっくりと増加し, 基本スケールよりはるかに小さなエネルギーで強くなるだろう. テクニカラー結合が強くなるこのエネルギーはゲージ・ボゾンの質量の式 (21.4.32) に現れるパラメータ F_{ab} のスケールを決め, したがってそれは多分 300 GeV の程度だろう. エネルギーの低下にともなう結合の増大は対数的なので, テクニカラーとカラーのベータ関数があまり違わなくても, カラーの力とテクニカラーの力が強くなるエネルギー・スケールの 3 桁の違いが生じることが可能だ.

テクニカラーは $SU(2) \times U(1)$ の自発的破れの非常に魅力的な描像を与えるが, 残念ながら, それだけではクォークとレプトンに質量を

与える機構を提供しない. このためクォークとテクニクォークを結びつける変換を持つ「拡張されたテクニカラー(extended technicolor)」ゲージ相互作用を付け加えることが提案された.[31] そのような理論にはフレーバーを変える中性カレントによる弱い相互作用の潜在的な問題がある. これらの問題は解決されるかも知れないが, この複雑さが加わったためにその魅力は半減する. 弱く結合した基本スカラーか動的対称性の破れかという問題は未解決のままだ.

21.5 電弱相互作用と強い相互作用の統一

15.2 節で見たように, ゲージ理論はゲージ群の単純部分群あるいは $U(1)$ 部分群毎に独立な結合定数を持つ. したがってゲージ群 $SU(2) \times U(1)$ に基づく電弱相互作用は二つの独立な結合 g と g' を持つ. 自由なパラメータの数を減らすために, $SU(2) \times U(1)$ ゲージ群が単純な $SU(3)$ ゲージ群に埋め込まれており, その結果 $g' = g/\sqrt{3}$ となるという考えが提案された.[32] しかしこれは実験的に否定された. 量子色力学の出現により, 理論家はゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と相対することになった. この群は量子色力学の結合 g_s と電弱相互作用の結合 g と g' の 3 個の独立なゲージ結合定数を持つ. これらの数を減らしてただ 1 個の自由なパラメータにするために, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を $SU(4) \times SU(4)$,[33] $SU(5)$,[34] $SO(10)$[35] 等の様々な単純リー群* に埋め込むことが提案された. そのような模型はしばしば大統一理論と呼ばれている.

幸いなことに, これらの模型や他の多くの模型において $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 結合定数の比は個々の模型の詳細には依らない.[36] この類の模型の特徴は, 観測されているクォークとレプトンの世代が各

*群 $SU(4) \times SU(4)$ は二つの $SU(4)$ を入れ替える離散的な対称性を含めることで単純になる.

模型に含まれる唯一のフェルミオンであるか, 少なくとも $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のもとで中性でない唯一のフェルミオンだという点だ.

15.2 節で示したように, どの単純コンパクト・リー群でも完全反対称な構造定数を持つ生成子 T_α の慣習的な選び方があり, それは各既約表現または可約表現 D で規格化条件,

$$\mathrm{Tr}\{T_\alpha T_\beta\} = N_D \delta_{\alpha\beta} \tag{21.5.1}$$

を満たす. 全ての左手成分のフェルミオンは次のように n_g 個の世代を持つと仮定する.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad \cdots,$$

$$\overline{e_R} \quad \overline{\mu_R} \quad \overline{\tau_R} \quad \cdots,$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad \cdots,$$

$$\overline{u_R} \quad \overline{c_R} \quad \overline{t_R} \quad \cdots,$$

$$\overline{d_R} \quad \overline{s_R} \quad \overline{b_R} \quad \cdots.$$

$SU(3)$ 生成子 $\frac{1}{2}g_s\lambda_3$ の固有値は, 赤色クォーク 2 重項と白色反クォーク 1 重項については $+\frac{1}{2}g_s$, 白色クォーク 2 重項と赤色反クォーク 1 重項については $-\frac{1}{2}g_s$, 他の全ての左手成分フェルミオンについてはゼロなので, その 2 乗のトレースは,

$$\mathrm{Tr}\left(\tfrac{1}{2}\, g_s\lambda_3\right)^2 = 4n_g \times \left(\tfrac{1}{2}\, g_s\right)^2 + 4n_g \times \left(-\tfrac{1}{2}\, g_s\right)^2 = 2n_g g_s^2 \tag{21.5.2}$$

となる. $SU(2)$ 生成子 t_3 の固有値は, 電荷 $\frac{2}{3}$ の赤色, 白色, 青色クォークとニュートリノについては $\frac{1}{2}g$, 電荷 $-\frac{1}{3}$ の赤色, 白色, 青色クォー

クと荷電レプトンについては $-\frac{1}{2}g$, 他の全てのフェルミオンについてはゼロなので, その 2 乗のトレースは,

$$\mathrm{Tr}\,(t_3)^2 = [3n_g + n_g] \times [(\tfrac{1}{2}\ g)^2 + (-\tfrac{1}{2}\ g)^2] = 2n_g g^2 \tag{21.5.3}$$

となる. 最後に, $U(1)$ 生成子 $y = t_3 - q$ の固有値は, ニュートリノと荷電レプトンについて $\frac{1}{2}g'$, 荷電反レプトンについては $-g'$, クォークについては $-\frac{1}{6}g'$, 電荷 $-\frac{2}{3}$ の反クォークについては $\frac{2}{3}g'$, 電荷 $+\frac{1}{3}$ の反クォークについては $-\frac{1}{3}g'$ なので, その 2 乗のトレースは,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,y^2 &= 2n_g(\tfrac{1}{2}\ g')^2 + n_g(-g')^2 + 6n_g(-\tfrac{1}{6}\ g')^2\\ &\quad +3n_g(\tfrac{2}{3}\ g')^2 + 3n_g(-\tfrac{1}{3}\ g')^2\\ &= \tfrac{10}{3}\ n_g g'^2\end{aligned} \tag{21.5.4}$$

となる. (21.5.1) よりトレース (21.5.2)–(21.5.4) は全て等しくなければならず, よってこの類の模型では $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ が一つの単純リー群に埋め込まれていることから, 結合定数に,

$$g_s^2 = g^2 = \tfrac{5}{3}\ g'^2 \tag{21.5.5}$$

の関係が要求される.

さて, (21.5.5) は結合定数の観測値とはひどく異なっている. 比 $g'^2/g^2 = \frac{3}{5}$ は電弱混合角が $\sin^2\theta \equiv g'^2/(g^2 + g'^2) = \frac{3}{8}$ となることを意味するが, 一方実験値は $\sin^2\theta = 0.231$ だ. さらに悪いことに, 強い相互作用の結合 g_s^2 はもちろん g^2 や g'^2 よりはるかに大きい.

この問題の解答[36]は, (21.5.5) のような結合定数の関係は単純ゲージ群が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に自発的に破れるときに質量を持つゲージ・ボゾンの典型的な質量[47] M に匹敵するエネルギー・スケールで測った結合についてのみ成り立つということだ. 結合が測定されるエネルギー E が M よりはるかに小さければ, $\ln(M/E)$ に比例する大きな輻射補正がある.

19 章で強調したように, すぐ近くのエネルギー μ と $\mu - d\mu$ で測定した結合間の関係には大きな対数は存在しないので, この関係を M から E まで積分することで大きな対数に出くわすことなく $E \ll M$ での結合を計算できる. これを行うには, 結合がこの領域全体にわたって小さく保たれさえすればよい. フェルミオンの世代数が n_g のとき $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 結合について (18.7.2) より,**

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_s(\mu) = -\frac{g_s^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{n_g}{3} \right) , \tag{21.5.6}$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{6} - \frac{n_g}{3} \right) , \tag{21.5.7}$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g'(\mu) = -\frac{g'^3(\mu)}{4\pi^2} \left(-\frac{5n_g}{9} \right) \tag{21.5.8}$$

となる. これらの方程式の解は,

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{4n_g}{3} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) , \tag{21.5.9}$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{22}{3} - \frac{4n_g}{3} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) , \tag{21.5.10}$$

$$\frac{1}{g'^2(\mu)} = \frac{1}{g'^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{20n_g}{9} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) \tag{21.5.11}$$

となる. また (21.5.5) は,

$$g_s^2(M) = g^2(M) = \tfrac{5}{3}\, g'^2(M) \tag{21.5.12}$$

**(21.5.6) と (21.5.7) の括弧内の第 2 項は(18.7.2) と (18.7.3) からは $-n_f/6$ となる. ここでn_f はそれぞれの $SU(N)$ ゲージ群の基本表現のフェルミオンの数だ. しかしこれはフェルミオンの右手成分と左手成分がゲージ群の同じ表現に属するという仮定で計算されたものだ. 左手成分のフェルミオン(と反フェルミオン)だけを数えることにすれば, (21.5.6) と (21.5.7) の括弧内の第 2 項は $-n_f/12$ となるはずだ. $SU(3)$ については各世代当たり 2 個の左手成分クォーク 3 重項と 2 個の左手成分反クォーク 3 重項があるので $n_f = 4n_g$ で, $SU(2)$ については 3 個の左手成分クォーク 2 重項と 1 個の左手成分レプトン 2 重項があるのでこの場合も $n_f = 4n_g$ だ. $U(1)$ については, ベータ関数は $g'/24\pi^2$ に左手成分フェルミオンおよび反フェルミオンの $U(1)$ 荷電の 2 乗和をかけたものなので((18.2.38) と比較せよ), (21.5.4) によれば $(g'/24\pi^2) \times (10n_g g'^2/3)$ だ.

を意味すると解釈すべきだ．したがって (21.5.9) から (21.5.10) を引けば

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu)} = -\frac{11}{24\pi^2}\ln\left(\frac{M}{\mu}\right) \tag{21.5.13}$$

が得られ，また (21.5.10) から (21.5.11) の 3/5 を引けば，

$$\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{3}{5g'^2(\mu)} = -\frac{11}{12\pi^2}\ln\left(\frac{M}{\mu}\right) \tag{21.5.14}$$

が得られ，結合 (21.5.12) および世代数を消去することができる．これら二つの式の比をとると，$\sin^2\theta \equiv g'^2/(g^2+g'^2)$ についての式が，

$$\sin^2\theta = \frac{1}{6} + \frac{5e^2(m_Z)}{9g_s^2(m_Z)} \tag{21.5.15}$$

と得られる．この式では μ は $\sin^2\theta$ を測定するために使う過程の典型的なエネルギーすなわち $\mu \approx m_Z$ に等しいとした．こうする利点は，くりこみ群方程式 (21.5.6)–(21.5.8) を m_Z より高いエネルギーでのみ使っており，そのため $SU(2)\times U(1)$ の自発的対称性の破れの影響を強く受けないことだ．また (21.5.13) と (21.5.14) を組み合わせれば統一のスケール M についての式が，

$$\ln\left(\frac{M}{m_Z}\right) = \frac{4\pi^2}{11e^2}\left(1 - \frac{8e^2(m_Z)}{3g_s^2(m_Z)}\right) \tag{21.5.16}$$

と得られる．ここでも，電弱対称性の破れがくりこみ群方程式に及ぼす影響を避けるために，μ を m_Z の程度にとった．

18.2 節で見たように $\mu \approx m_Z$ での $e(\mu)$ の値は $e(m_Z)^2/4\pi = (128.87\pm0.12)^{-1}$ だ．これは真空偏極を使った従来の (ゲルマン・ロー流の) 定義による電荷だ．g_s, g', g との比較には (18.6 節のように) 修正された最小引き算で定義された結合を使う方がよい．その値は $e(m_Z)^2/4\pi = (127.9\pm0.1)^{-1}$ だ．(21.5.13) と (21.5.14) で最も不確かなのは $g_s^2(m_Z)$ の値だ．18.7 節で論じたように，低エネルギーのデータから外挿した g_s の値は $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118\pm0.006$ で，一方 Z^0 のハドロ

ンへの崩壊率から直接測定された値は $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.120 \pm 0.0025$ だ. $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118$ および $e(m_Z)^2/4\pi = 1/128$ とすると, (21.5.15) と (21.5.16) より $\sin^2\theta = 0.203$ と $M \approx 1.1 \times 10^{15}$ GeV が得られる.

21.3 節で述べたように, 通常のエネルギーでの物理を記述する有効ラグランジアンで小さく抑えられた非くりこみ可能な項がバリオン数とレプトン数を保存すると期待する理由はない. したがって $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を保存する 4 フェルミオン(クォーク 3 個とレプトン 1 個) 相互作用の存在が期待される. その係数は次元解析から M^{-2} の程度だ. これに基づいて陽子の寿命が初めて計算され, 10^{32} 年程度と見積もられた.[36] そのようなバリオン数とレプトン数を保存しない 4 フェルミオン相互作用は文献 33–35 のような模型では M 程度の質量のゲージ・ボゾン交換により生成される. より一般的には, バリオン数とレプトン数を保存しない過程が自然に小さく抑えられる理由が標準理論によって一度説明されてしまえば, バリオン数またはレプトン数が厳密に保存すると信じる理由は全く無くなった.

(21.5.15) の予言が $\sin^2\theta$ の測定値 0.23 に非常に近いことを見たが, しかし測定および計算の精度が十分良くなると両者が正確には一致しないことが明らかになった. 超対称性理論では余分な粒子がこの不一致を取り除き[36a], 約 1 桁大きな値 $M \simeq 2 \times 10^{16}$ GeV が得られる.[36b] この M は重力相互作用が強くなるエネルギー 10^{18} GeV とそれ程大きく異ならない点は非常に興味深い. M の値が大きくなると M^4 に比例している陽子の寿命が延びる効果もある.

21.6 超伝導*

超伝導はこの本で主として関心のある素粒子現象とは全く異なるが, ゲージ対称性の自発的破れの最初の現実的な例としても, また場の理論における有効場理論の威力とトポロジーの議論を用いることの非常に教育的な例としてもここで考察する価値がある.

超伝導体は単に電磁理論のゲージ不変性が自発的に破れている物質だ.** なぜ, またどの温度でこの対称性の破れが起こるかを説明するには詳細な動力学的理論が必要だが, 磁場の排除, 磁束の量子化, 電気抵抗の消失, 異なる電圧に保たれた超伝導体間のギャップでの交流の発生といった超伝導の最も注目すべき特徴を導くにはそのような理論は必要ない. この節で見るように, これらのゲージ対称性の破れの結果は低エネルギー・パイ中間子の取り扱いと同様に, ゴールドストン・モードの一般的な性質だけから導くことができる.[39]

どのような系の作用も, cgs 単位系では,

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) , \tag{21.6.1}$$

$$\psi_n(x) \to \exp\Big(iq_n\Lambda(x)/\hbar\Big)\psi_n(x) \tag{21.6.2}$$

の形をとるゲージ変換のもとで不変だ. ここで $\Lambda(x)$ は任意関数で, q_n は場 ψ_n によって消滅させられる電荷だ. 全ての電荷は電子の電荷 $-e$ の整数倍と仮定する. したがってこの群はコンパクトだ. つまり位相

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

**これは大部分の専門家が超伝導について歴史的にとってきた考え方ではない. 初期の現象論的な理論は電磁理論のゲージ不変性を破ることが知られていたが, これは啓発的というよりは問題があると見なされた. 超伝導の微視的理論を最初に与えたバーディーン(Bardeen)・クーパー(Cooper)・シュリーファー(Schrieffer)の独創的な論文[37]では対称性の破れについては全く述べられていない. その後アンダーソン(Anderson)[38]は超伝導体中での対称性の破れの重要な役割を強調したが, 今日でもたいていの教科書は詳細な力学的模型を使って超伝導を説明しており, 対称性の破れが言及されることはほとんどない.

Λ と $\Lambda + 2\pi\hbar/e$ は同等と見なされる．この対称性の群は超伝導体中では電荷 $-2e$ を持つ演算子 (例えば 2 個の電子場の積) のゼロでない期待値によって破れており，したがって $\Lambda = 0$ および $\Lambda = \pi\hbar/e$ のゲージ変換から成る Z_2 部分群が破れずに残っていると仮定する．

ゴールドストン・ボゾン場 $\phi(x)$ を導入して全ての電荷を持った場を，

$$\psi_n(x) = \exp\Big(iq_n\phi(x)/\hbar\Big)\tilde{\psi}_n(x) \tag{21.6.3}$$

と書く．場 $\phi(x)$ は剰余類空間 $U(1)/Z_2$ をパラメータ化し，したがってゲージ変換性，

$$\phi(x) \to \phi(x) + \Lambda(x) \tag{21.6.4}$$

を持つ．$\phi(x)$ は $U(1)$ ではなく $U(1)/Z_2$ をパラメータ化するので，$\phi(x)$ と $\phi(x) + \pi\hbar/e$ を同一視しなければならない．$\tilde{\psi}_n(x)$ は全てゲージ不変なので，それらを積分してしまうと，ラグランジアンが ϕ と A^μ のみのゲージ不変な汎関数として得られる．したがってゴールドストン・ボゾンと電磁場のラグランジアンは，

$$L = -\tfrac{1}{4}\int d^3x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + L_s\left[A_\mu - \partial_\mu\phi\right] \tag{21.6.5}$$

と書くことができる．ここで L_s は不完全にしかわからない汎関数だ．この場合の電流および電荷密度は，

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)}\,, \tag{21.6.6}$$

$$J^0(x) = -\frac{\delta L_s}{\delta A^0(x)} = -\frac{\delta L_s}{\delta\dot{\phi}(x)} \tag{21.6.7}$$

となる．これよりゴールドストン・ボゾン場の運動方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L_s}{\delta\dot{\phi}_s(x)} = \frac{\delta L_s}{\delta\phi(x)} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\delta L_s}{\delta\mathbf{A}(x)} \tag{21.6.8}$$

となり，(21.6.6) と (21.6.7) より電荷の保存則，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}J^0 = 0 \tag{21.6.9}$$

に等しい.

さて, この形式により, 超伝導体の注目すべき性質がどのように説明されるかを見ていこう. L_s については, 系がゴールドストン場と外部電磁場が存在しないときに安定で, エネルギーは $A_\mu = \partial_\mu \phi$ で少なくとも極小値をとり $A_\mu - \partial_\mu \phi$ に関する 2 回微分がゼロでないと仮定するだけでよい.

ただちに一つわかることは, 大きな超伝導体の深部で境界条件が重要でないところでは, 電磁場は純ゲージ,

$$A_\mu = \partial_\mu \phi \tag{21.6.10}$$

なので, 特に磁場はゼロでなければならない. これは**マイスナー効果** (Meissner effect) と呼ばれる. 「大きな超伝導体の深部」の意味はもう少し定量化できる. (21.6.10) が満たされていればエネルギーは最低なので, $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ の値が小さいときエネルギーは $|\mathbf{A} - \nabla\phi|^2 L^3/\lambda^2$ の程度でなければならない. ここで λ は物質の性質に依存する長さで L^3 は超伝導体の体積だ. B の程度の磁場が超伝導体を貫通すれば, $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ は BL の程度になり, したがって磁場が超伝導体に侵入するのに必要なエネルギーは B^2L^5/λ^2 の程度だ. 一方, 磁場 B を体積 L^3 から追い出すのに必要なエネルギーは B^2L^3 の程度だ. したがって弱い磁場は $B^2L^5/\lambda^2 \gg B^2L^3$ つまり $L \gg \lambda$ なら超伝導体から追い出される. このため λ は超伝導体の**侵入深度** (penetration depth) と呼ばれる.

同じエネルギーの考察から, どの超伝導物質にも臨界磁場があって, それ以上の磁場がかかると超伝導性が消失することかわかる. 磁場がゼロで超伝導性が存在することから, 物質の単位体積当たりのエネルギーは正常状態では例えば Δ という量だけ超伝導状態より高いことがわかる. λ よりずっと大きな長さを持つ超伝導体が磁場 B 中に置かれると, 磁場はその物質の大部分から追い出されるが, これには単

位体積当たり $B^2/2$ のエネルギーが必要だ. したがって磁場が臨界値,

$$B_c = \sqrt{2\Delta} \tag{21.6.11}$$

以下なら, またそのときに限り, 物質は超伝導状態である方がエネルギー的に有利だ. (これは一様な超伝導体の場合だ. 以下で見るように, ある種の超伝導体では B_c 以上の有限な範囲の磁場については, 中心が正常な金属状態になった細い**渦糸** (vortex line) が形成されることによりその物質の全体の大部分で超伝導性が維持されることが可能だ.) 磁場 $B < B_c$ は深さ λ まで超伝導体に侵入するが, これによってこの層の超伝導性が消失するわけではない. 実際, 場の方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$ に示されるているように, 電流が流れることができるのは超伝導体のこの表面層だ.

次に λ よりはるかに太い超伝導性の金属線を曲げて作った閉じた輪を考える. 金属線の深部を走る閉曲線で, それに沿って $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ がゼロとなる線 $\mathcal{C}$ を引くことができる. これは $\mathbf{A}$ や ϕ がこの閉曲線上でゼロになることを意味するわけではない. わかることは, 輪を一周すると ϕ は同等な値に戻らなければならず, よって $n\pi\hbar/e$ だけしか変化できないということだ. ここで n は正または負の整数かゼロだ. したがってストークスの定理から, $\mathcal{C}$ で囲まれた面積 $\mathcal{A}$ を貫く磁束は**磁束の量子化** (flux quantization) の法則,

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{x} = \frac{n\pi\hbar}{e} \tag{21.6.12}$$

を満たす.

磁束 (21.6.12) を維持する電流は超伝導金属線の表面から厚さ λ の層を流れる. 磁束の量子化から, この電流は滑らかに減衰することはできず, 磁束 (21.6.12) が $\pi\hbar/e$ の整数倍だけ小さくなるように階段状にしか減ることができないので, 超伝導体中では通常の電気抵抗は存在できない.

超伝導体中では閉じた輪だけでなくもっと一般的な状況でも電気抵抗が存在しないことは, 超伝導体の時間に依存する効果を考察すると示すことができる. (21.6.7) より, $-J^0$ は ϕ の正準共役量だと解釈できる. したがってハミルトニアン H_s は ϕ と $\dot{\phi}$ ではなく ϕ と J^0 の汎関数と見なすべきだ. そして ϕ の時間依存性はハミルトン方程式,

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H_s}{\delta(-J^0(x))} \tag{21.6.13}$$

で与えられる. さて, 任意の点での「電圧」$V(x)$ はちょうどその点での電荷密度の変化に対するエネルギー密度の変化率なので, (21.6.13) よりゴールドストン・ボゾン場の時間依存性が,

$$\dot{\phi}(x) = -V(x) \tag{21.6.14}$$

と与えられる. したがって, 安定した電流を運ぶ超伝導金属線は, 場が時間に依存しないならばその両端間の電位差がゼロでなければならない. なぜなら, さもないと $\phi(x)$ が時間に依存する勾配を持つことになるからだ. 有限の電流が流れて電位差がゼロというのがゼロ抵抗の意味だ.

次に 2 個の超伝導物質の間隙を考える. 間隙の表面に沿ってどのような勾配もなく, ベクトル・ポテンシャルもなければ, ゲージ不変性より L_s は 2 個の超伝導体のゴールドストン・ボゾン場の差 $\Delta\phi$ のみに依存して,

$$L_{\text{junction}} = \mathcal{A}F(\Delta\phi) \tag{21.6.15}$$

となるはずだ. ここで $\mathcal{A}$ は接合面積だ. さらにどちらかの超伝導体の ϕ を $\pi\hbar/e$ だけずらしても物理的効果はないので, 関数 F は,†

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + \pi\hbar n/e) \tag{21.6.16}$$

† この関数はジョゼフソン(Josephson)[40] により計算され, $\cos(2e\Delta\phi/\hbar)$ に比例することがわかったが, これは近似的な結果だ. 一方周期性は厳密だ.

と周期的でなければならない. 電流はそのような間隙を通って流れるが, それはベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ が存在するときの接合を考えれば計算できる. そのときゲージ不変性より, 関数 F は $\Delta\phi$ の代わりに,

$$\Delta_A\phi = \int \mathbf{dx}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi - \mathbf{A})$$

に依存しなければならないことがわかる. ここで積分は 2 個の超伝導体をつなぐ線全体にわたって取る. (21.6.6) より電流密度は,

$$\mathbf{J} = \frac{\delta L_{\text{junction}}}{\delta\mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{n}}F'(\Delta_A\phi)$$

となる. ここで $\hat{\mathbf{n}}$ は間隙に垂直な単位ベクトルだ. ここでベクトル・ポテンシャルを取り除けば, 電流は,

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}}F'(\Delta\phi) \tag{21.6.17}$$

となることがわかる. ここで 2 個の超伝導体が電位差 ΔV の一様な電圧に維持されるとすれば, (21.6.14) よりゴールドストン・ボゾン場の差は時間依存性,

$$\Delta\phi = -t\Delta V + \text{定数} \tag{21.6.18}$$

を持つ. これを (21.6.17) で使って (21.6.16) を考慮すれば, 電流は周波数,

$$\nu = e|\Delta V|/\pi\hbar \tag{21.6.19}$$

で振動する. これは**交流ジョゼフソン効果** (ac Josephson effect)[40] と呼ばれている. 周波数と電圧は高い精度で測定可能なので, この効果は定数 $e/\hbar$ を測定する極めて正確な方法を与えている.

19.6 節の最後で指摘したように, 対称性が破れた系をゴールドストン・モードだけを使って記述することは, 系の破れた対称性が回復する点に近づくと, 不適切となる. このような状況ではゴールドストン・モードには長波長極限で周波数がほとんどゼロの別のモードがとも

ない, ゴールドストン・モードと一緒になって, 秩序パラメータと呼ばれる対称性群の線形表現を作る. この表現は通常は既約だ. ゆっくり変化する外場中での一様な超伝導体は局所的な秩序パラメータで記述されると仮定するのはもっともらしい. なぜならどのような非局所性も, 電磁場やゴールドストン・ボゾン場が変化すると仮定される距離のスケールよりずっと短い(平均の電子・電子間距離のような)微視的な距離のスケールで特徴付けられるからだ. 超伝導性の場合には, この秩序パラメータの性質について疑問はない. 群 $U(1)$ の唯一の非自明で既約な線形表現は,

$$\psi_1 + i\psi_2 = \rho \exp\Big(2ie\phi/\hbar\Big) \equiv \psi \tag{21.6.20}$$

で定義される実 2 元ベクトル ψ_n, すなわち, ゴールドストン・モード ϕ とモジュラー(modular)場 ρ だ. $\Lambda = \pi\hbar/e$ のゲージ変換で ψ_n が不変になるには(これより小さな Λ では不変にならない), 指数の $i\phi$ の係数は $2e/\hbar$ でなければならない. 対称性が破れる相転移点に近くほとんど一様で時間に依存しない系では, 秩序パラメータは小さく空間的にゆっくり変化するので, 外部ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ 中でのラグランジアンは(今後 $\hbar = 1$ の自然単位を使うことにして),

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-\tfrac{1}{2} \Big(\boldsymbol{\nabla}\psi_n - 2ie\, t_{nm} \mathbf{A} \psi_m \Big)^2 + \tfrac{1}{2}\, m^2 \psi_n \psi_n - \tfrac{1}{4}\, g (\psi_n \psi_n)^2 \right] \tag{21.6.21}$$

で近似できる. ここで t はエルミートな $U(1)$ 生成子,

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

で, g は下に有界なハミルトニアンを得るには正に取らなければならない. これは超伝導の**ギンツブルグ・ランダウ** (Ginzburg–Landau) 理論だ.[41] それは, 後で示す超伝導の微視的理論から, ゴルコフ (Gor'kov)[42]

によって近距離ポテンシャルで物質が超伝導性を失う臨界温度に近い温度の場合に導かれた.

ρ と ϕ を使うと (21.6.21) は,

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-2e^2\rho^2 \left(\nabla\phi - \mathbf{A}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\, m^2\rho^2 - \tfrac{1}{4}\, g\rho^4 - \tfrac{1}{2}\left(\nabla\rho\right)^2 \right] \tag{21.6.22}$$

となり, 場の方程式は,

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4e^2\rho^2(\nabla\phi - \mathbf{A})\,, \tag{21.6.23}$$

$$\nabla^2\rho = -m^2\rho + g\rho^3 + 4e^2\rho(\nabla\phi - \mathbf{A})^2 \tag{21.6.24}$$

となる. $\rho \neq 0$ の場合にこれらの方程式が満たされていれば $U(1)$ 対称性は破れている. これは場がゼロの一様な物質中では $m^2 > 0$ なら成り立っており, その場合には ρ は値 $\langle\rho\rangle = m/\sqrt{g}$ をとる. 侵入深度 λ は $-\frac{1}{2}(\nabla\phi - \mathbf{A})^2$ の係数の平方根の逆数として定義されたので, ここでは,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4e^2\langle\rho\rangle^2}} = \frac{\sqrt{g}}{2em} \tag{21.6.25}$$

となる. これは (21.6.23) によれば磁場の変化を特徴付ける距離だ. 一方, モジュラー場 ρ の変化は**相関距離** (correlation length) と呼ばれる距離のスケールで特徴付けられる. その値は (21.6.24) より,

$$\xi = 1/m\sqrt{2} \tag{21.6.26}$$

で与えられる.†† また, $\rho = \langle\rho\rangle$ の超伝導状態は $\rho = 0$ の常伝導状態より単位体積当たり,

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, m^2\langle\rho\rangle^2 - \tfrac{1}{4}\,\langle\rho\rangle^4 = m^4/4g \tag{21.6.27}$$

††因子 $\sqrt{2}$ が m と一緒に含まれているのは, (21.6.24) の関数 $-m^2\rho + g\rho^3$ の微分が $\rho = \langle\rho\rangle$ で $2m^2$ だからだ.

だけ低いエネルギーを持つ. (21.6.25)-(21.6.27) からパラメータ m と g を消去して, 観測可能量 λ, ξ, Δ の間の重要な近似的な関係式,

$$\Delta \simeq \frac{1}{8\,e^2\lambda^2\xi^2} \tag{21.6.28}$$

が得られる.

モジュラー場は超伝導渦糸の力学で重要になる. 渦糸は, ある種の超伝導体を十分強い磁場中に置いたとき, 磁束の管が物質を貫通する方がエネルギーが低くなる場合に生じる. (渦糸が生じる条件は後で論じる.) 渦糸の管を 1 周する閉曲線 $\mathcal{C}$ を侵入深度よりずっと長い距離だけ離れて磁場がゼロとなる位置を通るように引いて, (21.6.12) の議論を繰り返すと, $\mathcal{C}$ で囲まれた面積 $\mathcal{A}$ を通る磁束は閉曲線を 1 周するときの ϕ の変化に等しく, したがって磁束の量子 π/e の整数倍でなければならないことがわかる. これは, 太い超伝導リングを通過する磁束の場合と同じだ. この磁束がゼロでないところでは, 各々の管の内部に電磁理論のゲージ不変性が破れていない線が存在しなければならない. このことを見るには, 閉曲線 $\mathcal{C}$ を磁場が強い領域に縮めれば, もはや $\nabla\phi = \mathbf{A}$ は成り立たないが, 閉曲線を 1 周したときの ϕ の変化は π/e の整数倍のままでなければならず, よって連続性から変化できないことに気付けばよい. したがって最終的には, ρ がゼロになり, ϕ が良く定義されなくなる (多分有限の太さの) 線が存在しなければならない. (これは 23 章で使う 1 種の位相幾何学的な理由付けの初歩的な例だ.) この線の近傍では ρ と ϕ の両方を力学変数として考慮する必要がある.

磁束の量子化により, 最小の磁束 π/e を持つ超伝導渦糸は安定だ. それより大きな磁束の渦糸は単純に消えてしまうことはできないが, 磁束の量子化だけではそれがより小さな磁束の渦糸に分かれることの妨げとならない. ボゴモルニ (Bogomol'nyi)[43a] は, $\lambda > \xi$ のときには, またそのときに限り, 磁束 $n\pi/e$ (ただし $n > 1$) の渦糸は磁束 π/e の

n 本の渦糸に分かれることに対して不安定なことを示した.

この事および他の理由により, 超伝導物質を二つの種類に分けるのが便利だ. **第 1 種超伝導体** (ニオブを除く大部分の純粋な金属) は $\xi > \lambda$ で, **第 2 種超伝導体** (ニオブと大部分の合金) は $\lambda > \xi$ だ. この差異は電弱標準理論では, ($1/\xi$ に類似の) スカラーの質量が ($1/\lambda$ に類似の) W と Z の質量より小さいか大きいかの差に対応する.

相関距離 ξ と侵入深度 λ の定義から, モジュラー・パラメータは渦糸の中心線での値ゼロから平衡値 $\langle\rho\rangle$ に相関距離 ξ 程度の距離で増加し, 一方磁場は中心線からの距離とともに侵入深度 λ 程度の距離で小さくなる. したがって $\xi \gg \lambda$ を満たす第 1 種超伝導体での渦糸解は, ほとんど正常状態の金属の細い内側の円柱部分とそれを囲むずっと厚い外側の円筒部分からなり, 内側の円柱部分では磁場が小さくなってゼロに達し, 外側の円筒ではモジュラー・パラメータが漸近値 $\langle\rho\rangle$ に近づく. 対照的に, $\lambda \gg \xi$ を満たす第 2 種超伝導体の渦糸は, 内側の定磁場の細い円柱とそれを囲む外側のずっと厚い超伝導物質の円筒から成り, 内側の円柱部ではモジュラー・パラメータが増大して漸近値 $\langle\rho\rangle$ に達し, 外側の円筒部では磁場が小さくなってゼロに達する. 渦糸解は両方の種類の超伝導体と任意の磁場について存在するが, 今から見るように, 渦糸ができた方がエネルギーが低くなるのは第 2 種超伝導体と有限の範囲の磁場の場合だけだ.

各渦糸は, 物質が正常状態あるいはそれに近い状態にある $\pi\xi^2$ 程度の断面積を持つので, これらの渦糸を生成するのに必要な単位体積当たりの余分なエネルギーは $\mathcal{N}\pi\xi^2\Delta$ の程度だ. ここで $\mathcal{N}$ は単位面積当たりの渦糸の数だ. この渦糸の密度には $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$ の制限がある. なぜなら, もしそうでなければ正常状態の金属の円柱は重なってしまって, その物質は正常状態にあると考えられるからだ. 磁場は, $\mathcal{N} < 1/\pi\lambda^2$ なら物質の $1-\mathcal{N}\pi\lambda^2$ の部分から追い出され, $\mathcal{N} > 1/\pi\lambda^2$ なら物質全体から追い出されなければならない. したがって渦糸状

態の単位体積当たりのエネルギーは磁場がないときの超伝導体に比べて,

$$W_V \approx \mathcal{N}\pi\xi^2\Delta + \tfrac{1}{2}\,B^2 \times \begin{cases} 1-\mathcal{N}\pi\lambda^2 & \mathcal{N} \le 1/\pi\lambda^2 \\ 0 & \mathcal{N} \ge 1/\pi\lambda^2 \end{cases} \tag{21.6.29}$$

となる. ($\frac{1}{2}$ や π 等の数因子は読者にこれらの表現の起源を思い出してもらうために残しているが, 文字どおりに取る必要はない.) 比較のために記すと, 正常状態の金属の単位体積当たりのエネルギーは超伝導状態より $W_N = +\Delta$ だけ高く, 超伝導体から全ての磁場を追い出すのに必要な単位体積当たりのエネルギーは $W_S = B^2/2$ だ. 与えられた磁場に対して W_S, W_N, W_V のうちどれが最も小さいかを調べれば, どの状態が実現するかを決定できる.

第 1 種超伝導体では磁場が臨界磁場 $B_c \equiv \sqrt{2\Delta}$ より大きいか小さいかで区別する必要がある. $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$ と $\xi > \lambda$ を考慮すると $\mathcal{N} < 1/\pi\lambda^2$ だ. したがって $B < B_c$ では (21.6.29) より $W_V > \frac{1}{2}B^2 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)\Delta > W_S$ となり, 渦糸は存在できない. またそのような磁場については $W_N > W_S$ なので, 物質は超伝導状態だ. 他方, $B > B_c$ では (21.6.29) より $W_V > \Delta[1 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)] > W_N$ なので, この場合も渦糸は存在できない. またそのような磁場については $W_S > W_N$ なので, 物質は正常状態にある.

第 2 種超伝導体では磁場が $B < B_{c1}$, $B_{c1} < B < B_{c2}$, $B > B_{c2}$ の三つの領域について分けて考える必要がある. ここで B_{c1} と B_{c2} は,

$$B_{c1} \approx \sqrt{2\Delta}\,\xi/\lambda\,, \qquad\qquad B_{c2} \approx \sqrt{2\Delta}\,\lambda/\xi$$

の程度の二つの臨界磁場だ. 既に見たように, 第 2 種超伝導体では唯一の安定な渦糸は最小の磁束[‡] π/e を持つものだけなので, 磁場 B 中では (21.6.29) の単位面積当たりの渦糸の数 $\mathcal{N}$ を eB/π と置くべき

[‡]上で述べた孤立した渦糸の場合の磁束量子化の導出はここでは完全には適用できない. 後で見るように, $B > B_{c1}$ での渦糸の間隔は侵入深度 λ より短いので, 渦糸か

だ. $B < B_{c1}$ では (21.6.28) を使って $eB/\pi < 1/\pi\lambda^2$ が示せる. したがって (21.6.29) の渦糸の密度の係数は正の量 $\pi\xi^2\Delta - \frac{1}{2}B^2\pi\lambda^2$ なので, この場合は $W_V > W_S$ となり $B < B_{c1}$ では渦糸は存在しない. またそのような磁場については $W_N > W_S$ なので, 物質は完全に超伝導状態だ. $B > B_{c1}$ の場合には, (21.6.28) より渦糸の密度 $\mathcal{N} = eB/\pi$ は $1/\pi\lambda^2$ より大きいので, 渦糸状態では磁場が超伝導体を完全に貫通し, 単位体積当たりのエネルギーは (21.6.29) と (21.6.28) から,

$$W_V \approx \mathcal{N}\pi\xi^2\Delta = eB\xi^2\Delta \approx (B/B_{c2})W_N \approx (B_{c1}/B)W_S$$

と与えられる. したがって $B_{c1} < B < B_{c2}$ では $W_V < W_N$ および $W_V < W_S$ となり, 物質は渦糸状態となる. $B > B_{c2}$ では依然 $W_V < W_S$ だが今度は $W_N < W_V$ なので, 渦糸は消え全ての超伝導性は失われる. $\lambda \gg \xi$ の第 2 種超伝導体が以前に推定した臨界値 $B_c \approx \sqrt{\Delta}$ をはるかに越える磁場を持つことができるという点は, 高エネルギー加速器用の磁石を含めて超伝導の技術的応用には重要だ.

ギンツブルグ・ランダウ理論は, 物質が正常状態と超伝導状態との間の転移点の近くにある時にのみ成り立つので, ρ がゼロになる渦糸の中心の近くでこの理論を適用してみよう. 渦糸の中心付近ではその曲がりを無視して, 円柱対称性を仮定できる. 場 $\mathbf{A} - \nabla\varphi$ は方位角成分,

$$\Big(\mathbf{A} - \nabla\phi\Big)_\theta = A(r) \tag{21.6.30}$$

ら λ よりずっと長い距離だけ離れて渦糸を 1 周する円を描くだけでは, $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$ を満たす閉曲線 C を見つけることができない. 代わりに, 連続性の考察が必要だ. (これはティンカーム (M. Tinkham) との個人的な議論による.) 任意の 2 本の渦糸の中心間を結ぶ任意の連続曲線を描いたとする. 後で示すように, この曲線上で $\mathbf{A} - \nabla\phi$ はどちらの渦糸の近くでも非常に大きいが, 曲線の反対側を向いている. したがってそのような曲線上に少なくとも 1 点は $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$ となる点がある. $\mathbf{A} - \nabla\phi$ はゲージ不変なので, それは連続なはずだ. よって各渦糸の回りに $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$ を満たす閉曲線 C が存在する.

のみを持ち, 磁場が軸成分,

$$B_z = \Big(\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi)\Big)_z = A'(r) + A(r)/r \tag{21.6.31}$$

のみを持つようにとる. 一方 ρ は r のみの関数だ. したがって渦糸の構造は連立微分方程式,

$$A''(r) + r^{-1}A'(r) - r^{-2}A(r) = \frac{\rho^2(r)A(r)}{\lambda^2\langle\rho\rangle^2}\ , \tag{21.6.32}$$

$$\rho''(r) + r^{-1}\rho'(r) + \frac{1}{2\xi^2}\left(\rho(r) - \frac{\rho^3(r)}{\langle\rho\rangle^2}\right) = 4e^2\rho(r)A^2(r) \tag{21.6.33}$$

で決まる. r が相関距離 ξ と侵入深度 λ の両方より小さいときには, (21.6.32) と (21.6.33) の $1/\xi^2$ と $1/\lambda^2$ に比例する項を無視できて, 簡単化した方程式,

$$A'' + A'/r - A/r^2 = 0\ , \tag{21.6.34}$$

$$\rho'' + \rho'/r = 4e^2A^2\rho \tag{21.6.35}$$

が得られる. (21.6.34) の一般解は,

$$A(r) = \frac{Br}{2} + \frac{C}{2er} \tag{21.6.36}$$

となる. ここで定数 B は (21.6.31) より渦糸に沿った磁場で, C は今のところ任意の実定数だ. (21.6.35) でこれを使うと, $r \to 0$ のとき $\rho(r)$ の解は $r^{|C|}$ と $r^{-|C|}$ の線形結合であることがわかる. 秩序パラメータ $\rho\exp(2ie\phi)$ は位置の滑らかな関数でなければならないので, $|C|$ は正の整数 ℓ で, $\rho \propto r^\ell$ となり $r \to 0$ のとき $\phi = \pm\ell\varphi/2e +$ [定数] となると結論できる. ϕ に関するこの解は (21.6.36) で $C = \pm\ell$ と置いたものと矛盾がない. なぜなら, $r \to 0$ のとき $\boldsymbol{\nabla}\phi$ の方位角成分は $\pm\ell/2er$ に近づき, 一方解析性から $\mathbf{A}$ の方位角成分はゼロにならなければならないからだ. 特異性を持たないゲージ変換によってあらゆる場所で

$\phi = \pm\ell\varphi/2e$ とできるので, (21.6.12) と同じ理由で侵入深度よりずっと大きな超伝導体の1本の渦糸が持つ磁束は $\pm\pi\ell/e$ だ. 期待したとおり秩序パラメータは渦糸の中心でゼロになるだけでなく, π/e の単位で測った磁束の大きさに等しい r の冪でゼロになることがわかる.

ϕ のこの解は $\phi(2\pi) - \phi(0)$ が π/e の整数倍だという「量子化」条件を満たし, それは磁束の量子化を意味する. (21.6.5) に基づくゴールドストン・ボゾンと電磁場の理論では ϕ に関するこの条件は場の方程式の解に手で課さなければならないが, ギンツブルグ・ランダウ方程式はこの条件を「知っている」. なぜならこれらの方程式は秩序パラメータの適切な選択に基づいているからだ.

＊＊＊

超伝導体の最も劇的な性質は, 電磁理論のゲージ不変性が自発的に破れているという仮定から直接導くことができるが, これがいつどのように起こるかを理解するには超伝導性の微視的な理論が必要だ. バーディーン・クーパー・シュリーファー[37]の超伝導性の微視的理論の導出は有効場理論の言葉で, この本の 19.5 節と 21.4 節で使ったのと同様の次数勘定の方法を使って, 再構築された.[44,44a] この目的で, 電子間の有効相互作用のみを残して, 超伝導体のイオンの自由度については積分してしまったとしよう.[‡‡] 簡単のため, 温度ゼロで考え, 最初は外場を仮定せず, したがってラグランジアンは並進と時間反転の演算 T のもとで不変だとする. またスピンに依存しない力を仮定し, したがってラグランジアンはスピンの添字のみに作用する $SU(2)$ 変換のもとで不変だとするが, 運動量に作用する回転のもとでの不変性は仮

---

‡‡厳密にいうと, 電子以外の全ての自由度を積分してしまうことは不可能だ. なぜなら, フォノンは, 相対論的理論における質量ゼロ粒子のように, 非常に長い波長では周波数がゼロになるゴールドストン・ボゾンだからだ. しかし有効電子・電子相互作用として表せないフォノン相互作用のそれらの効果はイオンの質量の逆数の因子で抑えられている.

定する必要がない. すると電子は運動量 $\mathbf{p}$ とスピンの添字 $s=\pm\frac{1}{2}$ で特徴付けられ, 消滅演算子 $a(\mathbf{p},s,t)$ と生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p},s,t)$ によって,

$$\begin{aligned} L = &-\sum_s \int d^3p\, a^\dagger(\mathbf{p},s,t)\left[-i\frac{\partial}{\partial t}+E(\mathbf{p})\right]a(\mathbf{p},s,t) \\ &+\sum_{s_1\,s_2\,s_3\,s_4}\int d^3p_1\,d^3p_2\,d^3p_3\,d^3p_4\,V_{s_1\,s_2\,s_3\,s_4}(\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}_3,\,\mathbf{p}_4) \\ &\quad\times a^\dagger(\mathbf{p}_1,s_1,t)\,a^\dagger(\mathbf{p}_2,s_2,t)\,a(\mathbf{p}_3,s_3,t)\,a(\mathbf{p}_4,s_4,t) \\ &\quad\times \delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4) \\ &+\quad\cdots \end{aligned} \tag{21.6.37}$$

の形のラグランジアンを用いて記述される. ここで「$\cdots$」は 6 個以上の生成・消滅演算子を持つ項を表し, $E(\mathbf{p})$ は電子のエネルギーと化学ポテンシャルの差だ. 自由電子の場合には, E_F をフェルミ面での電子のエネルギーとして $E(\mathbf{p})=\mathbf{p}^2/2m_e-E_F$ だ. 相互作用によりこの関数は必然的に変化するが, $E(\mathbf{p})$ は球面 $|\mathbf{p}|=\sqrt{2m_eE_F}$ 上の運動量 $\mathbf{p}$ を持つ自由電子の場合にはゼロになるので, 相互作用が存在すればある閉じたフェルミ面 $\mathcal{S}$ 上でやはりゼロになるだろう.

$$E(\mathbf{p})=0 \quad (\mathcal{S}\text{上の}\,\mathbf{p}\,\text{について})\,. \tag{21.6.38}$$

以下で明らかになる理由から, フェルミ面近傍の厚さ κ の薄い球殻内の電子以外の全ての電子を積分してしまう.♮ (切断 κ は後でくりこまれた電子・電子ポテンシャルを導入することにより取り除くことができる.) すると残った自由度は,

$$\mathbf{p}=\mathbf{k}+\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})\ell \tag{21.6.39}$$

♮スピンに依存する力については, 行列 $E_{s's}(\mathbf{p})$ の固有値毎に一つずつ, 合わせて二つのフェルミ面が存在する. そこで各スピン固有状態の全ての電子について, 対応するフェルミ面近くの薄い球殻内の電子を除いて積分してしまう.

の形の運動量を持つ電子だ. ここで $\mathbf{k}$ はフェルミ面 $\mathcal{S}$ 上にあり, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}$ でのフェルミ面に垂直な単位ベクトルで, $0 \le \ell \le \kappa$ だ. そのような運動量について,

$$E(\mathbf{p}) = v_F(\mathbf{k})\ell \tag{21.6.40}$$

が成り立つ. ここで,

$$v_F(\mathbf{k}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \cdot \Big(\nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p})\Big)_{\mathbf{p}=\mathbf{k}} \tag{21.6.41}$$

と定義した. すると, 波数・周波数空間での電子のプロパゲーターは,

$$\frac{1}{\omega - v_F(\mathbf{k})\ell + i\epsilon} \tag{21.6.42}$$

となる.

ここで一般的な連結行列要素が $\kappa \to 0$ で κ とともにどのように変化するかを考察しよう. 各ループ毎に周波数についての積分があり, 各々の内線にプロパゲーターがあるので, プロパゲーターの積の全ての周波数についての積分は ℓ^{L-I} の ℓ 依存性を持つ. ここで L はループの数で I は内線の数だ. ℓ 積分の数を数えるには, 相互作用項 (21.6.37) のデルタ関数は一般の運動量について $\mathbf{k}$ に制限を付けるが, ℓ には制限を付けないことに留意することが重要だ. (例えば, 運動量保存より 2 個の電子の線の運動量 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が合わせて $\mathbf{P} \neq 0$ の運動量を持つように制限されていれば, $\mathbf{p}_1$ の積分は, 一方は $\mathbf{P}$ に中心を持ち他方は原点に中心を持つ, 厚さ κ の閉じた二つの球殻の共通部分を動く. これらの球殻の共通部分は太さ κ の閉じた円輪なので, 円輪の円周方向の位置を与える $\mathbf{k}$ の一つの成分と円輪の断面内の位置を与える二つの ℓ について積分しなければならない.) したがって ℓ についての積分は I 個あり, 被積分関数は ℓ^{L-I} で振舞うので, 行列要素は,

$$M \propto \kappa^L \tag{21.6.43}$$

で変化する. ループの数は内線の数および種類 i の頂点の数 V_i とよく知られた関係,

$$L = I - \sum_i V_i + 1 \tag{21.6.44}$$

にある. また内線の数は頂点の数および外線の数 E と, よく知られたもう一つの関係,

$$2I + E = \sum_i n_i V_i \tag{21.6.45}$$

にある. ここで n_i は種類 i の相互作用での電子の演算子の数だ. (21.6.44) と (21.6.45) から I を消去すると,

$$L = 1 - \tfrac{1}{2}\, E + \tfrac{1}{2}\, \sum_i V_i(n_i - 2) \tag{21.6.46}$$

が得られる. 作用の $n_i = 2$ の項は関数 $E(\mathbf{p})$ を変化させその結果フェルミ面をずらす働きをするだけだ. 真の相互作用は $n_i > 2$ を持つので, (21.6.43) と (21.6.46) から, それらの行列要素への寄与は $\kappa \to 0$ では相対的に無視できるように見える. 18.5 節の言葉を使えば, これは全ての相互作用が収縮的 (irrelevant) な演算子だということを意味する. これが, 正常状態の金属中のフェルミ面近くの電子がほとんど自由電子のように振舞う理由だ.

しかし, この結論には例外がある. もし 2 個の電子の線が真空に消えれば, 並進不変性よりこれらの 2 本の線の運動量は大きさが等しくて方向が逆でなければないので, 一方の運動量がフェルミ面の近くならば他方もそうだ. (時間反転不変性より $E(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ について偶でなければならないので, フェルミ面は一般には球面ではないが, やはり $E(\mathbf{p}) = 0$ なら $E(-\mathbf{p}) = 0$ が成り立つ.) すると, これら 2 本の線の一方の運動量 $\mathbf{p}$ についての積分は厚さ κ の球殻上を動く, つまり二つの k と一つの ℓ についてとることになる. そのような 2 本の線を含む相互作用の各々について, ℓ についての積分が 2 個ではなく 1 個あ

るので, そのような相互作用は, 行列要素の大きさの次数を (21.6.43) と (21.6.46) に示されているように因子 κ だけ減らすのではなく, 行列要素の大きさの次数には影響しない. 言い換えれば, 4 個の電子の演算子を含む相互作用は, 最終的に真空に消える電子の線の間に作用すると, 収縮的ではなく停留的となる.

この例外の帰結を知るには, 10.7 節で触れた**ハバード・ストラトノビッチ変換** (Hubbard–Stratonovich transformation)[45] と呼ばれる技法を使うのが便利だ. ゆっくり変化する外部電場を含めるので, 座標空間で考えるのが便利だ. ゲージ不変性より, ラグランジアン (21.6.37) は,

$$
\begin{aligned}
L = &-\sum_s \int d^3x\, \psi_s^\dagger(\mathbf{x},t) \\
&\times \left[-i\frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x},t) + E\Big(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\Big)\right]\psi_s(\mathbf{x},t) \\
&+ \sum_{s_1\, s_2\, s_3\, s_4} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4\, V_{s_1\, s_2\, s_3\, s_4}(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \mathbf{x}_3,\, \mathbf{x}_4) \\
&\times \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1,t)\, \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2,t)\, \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3,t)\, \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4,t)
\end{aligned}
\tag{21.6.47}
$$

となる. ここで,

$$
\psi_s(\mathbf{x},t) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\ \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\, a(\mathbf{p},s,t) \tag{21.6.48}
$$

と定義した. 電子演算子を 5 個以上持つ項は全て収縮的なのでここでは落としている. このラグランジアンに以下の項を付け加えて,

$$
\begin{aligned}
\Delta L = &\frac{1}{4} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4 \sum_{s_1 s_2 s_2 s_4} V_{s_1 s_2 s_2 s_4}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4) \\
&\times \left[\Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2,\, \mathbf{x}_1,\, t) - \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1,\, t)\, \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2,\, t)\right] \\
&\times \left[\Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3,\, \mathbf{x}_4,\, t) - \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3,\, t)\, \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4,\, t)\right],
\end{aligned}
\tag{21.6.49}
$$

電子場 ψ だけでなく新しい電子「対」の場 $\Psi(\mathbf{x},\, s,\, \mathbf{x}',\, s',\, t)$ についても経路積分する. これが許されるのは, ΔL が対場について 2 次で 2

次項の係数が場に依存しないので, 9 章の補遺によれば, 経路積分の $\Psi_{ss'}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$ についての積分はちょうど $\Psi_{ss'}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$ をラグランジアンの停留点 $\Psi_{ss'}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)=\psi_s(\mathbf{x},t)\,\psi_{s'}(\mathbf{x}',t)$ にする効果があるだけで, そこでは $\Delta L=0$ となるからだ. この追加した項は, $L+\Delta L$ の電子場について 4 次の項が消えて, これらの場について 2 次の項だけが残るように選ばれている.

$$
\begin{aligned}
&L+\Delta L\\
&\quad=-\sum_s\int d^3x\,\psi_s^\dagger(\mathbf{x},t)\\
&\qquad\times\left\{-i\frac{\partial}{\partial t}-A_0(\mathbf{x},t)+E\Big(-i\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\Big)\right\}\psi_s(\mathbf{x},t)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\sum_{s_1\,s_2\,s_3\,s_4}\int d^3x_1\,d^3x_2\,d^3x_3\,d^3x_4\,V_{s_1\,s_2\,s_3\,s_4}(\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2,\,\mathbf{x}_3,\,\mathbf{x}_4)\\
&\qquad\quad\times\Big[\psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1,t)\,\psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2,t)\,\Psi_{s_3s_4}(\mathbf{x}_3,\,\mathbf{x}_4,\,t)\\
&\qquad\qquad+\Psi_{s_2s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2,\,\mathbf{x}_1,\,t)\psi_{s_3}(\mathbf{x}_3,t)\,\psi_{s_4}(\mathbf{x}_4,t)\\
&\qquad\qquad-\Psi_{s_2s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2,\,\mathbf{x}_1,\,t)\,\Psi_{s_3s_4}(\mathbf{x}_3,\,\mathbf{x}_4,\,t)\Big]
\end{aligned}
\tag{21.6.50}
$$

さて話の核心に入ろう. 相互作用 V は真空に消える 2 個の電子の線に作用する場合を除いて収縮的であることを示した. これは, ゆっくり変化する電子対外場 $\Psi_{ss'}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$ のもとでの量子有効作用 $\Gamma[\Psi]$ を計算するときには, どの Ψ の内線で切っても非連結になるものを除いて全てのダイアグラムを落とすことを意味する. しかし, 量子有効作用の一般の定義より, 内線を切ると非連結になる全てのダイアグラムを落とす必要がある. したがって, Ψ の内線は一切含めてはいけない. (21.6.50) には電子場は 2 次で入っているので, 電子場について積分してしまったとき生き残る唯一のダイアグラムは (21.6.50) の角括弧の最後の項から生じる 1 頂点ダイアグラムと, 16.2 節と同じ理由で電子

場について2次の項の係数の行列式の対数で与えられる1ループ・ダイアグラムとの和だ.

$$\Gamma[\Psi] = \frac{1}{4} \sum_{s_1\, s_2\, s_3\, s_4} \int dt \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4$$
$$\times V_{s_1\, s_2\, s_3\, s_4}(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \mathbf{x}_3,\, \mathbf{x}_4)\Psi^\dagger_{s_2 s_1}(\mathbf{x}_2,\, \mathbf{x}_1,\, t)\, \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3,\, \mathbf{x}_4,\, t)$$
$$-\frac{i}{2} \ln \mathrm{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & -A^T \end{pmatrix} + [\text{定数項}]\,. \tag{21.6.51}$$

ここで A と B は「行列」,

$$A_{\mathbf{x}'s't',\mathbf{x}st} \equiv \delta_{s's}\left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x},t) + E\Big(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\Big)\right\}$$
$$\times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t)\,, \tag{21.6.52}$$

$$B_{\mathbf{x}'s't',\mathbf{x}st} \equiv -\Delta_{s's}(\mathbf{x}',\, \mathbf{x},\, t)\delta(t' - t) \tag{21.6.53}$$

で, Δ は**ギャップ関数** (gap function),

$$\Delta_{s's}(\mathbf{x}',\, \mathbf{x},\, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma'\sigma} \int d^3y\, d^3y'\, V_{s's\sigma'\sigma}(\mathbf{x}',\mathbf{x},\mathbf{y}',\mathbf{y})\, \Psi_{\sigma'\sigma}(\mathbf{y}',\, \mathbf{y},\, t) \tag{21.6.54}$$

のことだ. (これ以降, 積分してしまうモードから生じる Γ の付加的な定数項は無視する.) これは, ラグランジアン内の相互作用が小さいという仮定なしで有効作用が計算できる問題の一つだ.

これ以降の議論を簡単にするために. スピン 1 重項の対場,

$$\Psi_{+-}(\mathbf{x}',\, \mathbf{x},\, t) = -\Psi_{-+}(\mathbf{x}',\, \mathbf{x},\, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}',\, \mathbf{x},\, t) \tag{21.6.55}$$

の場合に限定しよう. ここで添字 + と − はそれぞれスピン +1/2 と −1/2 を表す.[卌] スピンの添字の回転のもとでの不変性を使うと, ここ

[卌] 液体 He^3 では対場のゼロでない成分はスピン 3 重項で, 成分 $\Psi_1 = \Psi_{++}$, $\Psi_0 = \sqrt{2}\Psi_{+-} = \sqrt{2}\Psi_{-+}$, $\Psi_{-1} = \Psi_{--}$ から成る.

で必要なポテンシャルの成分は以下のとおりだ.

$$
\begin{aligned}
&V_{+-+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) - V_{+--+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \\
&\quad = -V_{-++-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + V_{-+-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \\
&\quad \equiv 2V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \,. \qquad (21.6.56)
\end{aligned}
$$

すると (21.6.54) より,

$$\Delta_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Delta_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \,, \qquad (21.6.57)$$

$$\Delta_{++}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \Delta_{--}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = 0 \qquad (21.6.58)$$

が得られる. この場合, 量子有効作用 (21.6.51) は,

$$
\begin{aligned}
\Gamma[\Psi] = &\int dt \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4\, V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\
&\times \Psi^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)\, \Psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) \\
&-i \ln \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^T \end{pmatrix} , \qquad (21.6.59)
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t} \equiv &\left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E\Big(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\Big) \right\} \\
&\times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t) \,, \qquad (21.6.60)
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t} \equiv -\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)\, \delta(t' - t) \,, \qquad (21.6.61)$$

また,

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \int d^3y\, d^3y'\; V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y})\, \Psi(\mathbf{y}', \mathbf{y}, t) \qquad (21.6.62)$$

と定義した.

最初にこれらの結果を使って外部電磁場がない並進不変な場合を考察する. すると, 対場とギャップ場はフーリエ変換,

$$\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \int d^3p\; e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}\, \Psi(\mathbf{p}) \,, \qquad (21.6.63)$$

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p \, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \Delta(\mathbf{p}) \tag{21.6.64}$$

で表され, 電子・電子ポテンシャルは,

$$\int d^3x_1 \, d^3x_2 \, d^3x_3 \, d^3x_4 \; e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4)} \, V(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$\equiv \mathcal{V}_4 \, V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \tag{21.6.65}$$

の形になる. ここで $\mathcal{V}_4$ は時空間の体積,

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^3x \int dt \; 1 \tag{21.6.66}$$

を表す. 波数・周波数空間に移行すると, 「行列」(21.6.60) と (21.6.61) は対角行列になり, 行列式の計算は容易になる. 16.1 節で定義したように, 有効ポテンシャル $V[\Psi]$ (電子・電子ポテンシャルと混同しないように注意せよ) は単位時空間体積当たりの有効作用に逆符号をつけた,

$$\begin{aligned} V[\Psi] &\equiv -\Gamma[\Psi]/\mathcal{V}_4 \\ &= -\int d^3p \, d^3p' \; \Psi^*(\mathbf{p}') V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Psi(\mathbf{p}) \\ &\quad + \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\omega \, d^3p \, \ln\left(1 - \frac{|\Delta(\mathbf{p})|^2}{\omega^2 - E^2(\mathbf{p}) + i\epsilon}\right) \end{aligned} \tag{21.6.67}$$

で与えられる. ここで,

$$\Delta(\mathbf{p}) = -\int d^3p' \; V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \, \Psi(\mathbf{p}') \tag{21.6.68}$$

とした. ($i\epsilon$ 項は電子のループ・ダイアグラムについてのファインマン則から推測でき, 9.2 節で示したように, 元々は $t \to \pm\infty$ での電子場についての条件から生じる.) ウィック回転し, ω で積分し, Ψ を Δ で表すと, これは,

$$\begin{aligned} V[\Delta] = &-\int d^3p \, d^3p' \; \Delta^*(\mathbf{p}') V^{-1}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Delta(\mathbf{p}) \\ &- \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \Big[\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta(\mathbf{p})|^2} \, - \, E(\mathbf{p})\Big] \end{aligned} \tag{21.6.69}$$

となる．16.1 節で見たように，場の方程式は有効作用が停留する条件と同じなので，今の場合は平衡ギャップ関数 $\Delta_0(\mathbf{p})$ に関する有名な**ギャップ方程式** (gap equation),

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\delta V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{p})}\right|_{\Delta=\Delta_0} \\
&= -\int d^3p'\, V^{-1}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Delta_0(\mathbf{p}') - \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{\Delta_0(\mathbf{p})}{\sqrt{E^2(\mathbf{p})+|\Delta_0(\mathbf{p})|^2}}
\end{aligned}
$$

あるいは，もっとよく知られた形に書けば，

$$
\Delta_0(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3p'\,\frac{V(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,\Delta_0(\mathbf{p}')}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}')+|\Delta_0(\mathbf{p}')|^2}} \tag{21.6.70}
$$

が得られる．

全ての運動量積分は，最初からずっと (21.6.39) の形，つまりフェルミ面の近傍の厚さ κ の薄い球殻内に限定すると暗に理解してきた．したがって有効ポテンシャル (21.6.69) は，

$$
\begin{aligned}
V[\Delta] = &-\kappa^2 \int_S d^2k\, d^2k'\ \Delta^*(\mathbf{k}')V^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k}) \\
&-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\kappa \int_S d^2k\left[\sqrt{\ell^2\, v_F^2(\mathbf{k})+|\Delta(\mathbf{k})|^2}\ -\ \ell\, v_F(\mathbf{k})\right]
\end{aligned} \tag{21.6.71}
$$

となる．有効ポテンシャルは今やフェルミ面上のギャップ関数 Δ のみの汎関数と理解するべきだ．

κ は任意なので，ポテンシャル $V(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ の κ 依存性は，$V[\Delta]$ が κ に依存しないように与えなければならない．超伝導へのくりこみ群のほとんどの応用では，[44] 12.4 節で概説したウィルソンの方法を踏襲している．それは $V(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ の κ 依存性についての微分方程式を導き，その解の $\kappa \to 0$ での振舞いを調べるというやり方だ．融通性を持たせるために，ゲルマン・ローの方法を採用し，くりこまれた電子・電子ポテ

ンシャル,[44a]

$$V_\mu^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \equiv -\left.\frac{\delta^2 V[\Delta]}{\delta\Delta^*(\mathbf{k}')\delta\Delta(\mathbf{k})}\right|_{\Delta(\mathbf{k})=\Delta(\mathbf{k})^*=\mu} \tag{21.6.72}$$

を導入することも可能だ. ここで μ は 18.2 節で導入したのと同様の変化するくりこみスケールだ. 元の電子・電子ポテンシャルを V_μ で表すと, (21.6.71) は,

$$\begin{aligned} V[\Delta] = &-\int_S d^2k\, d^2k'\ \Delta^*(\mathbf{k}')V_\mu^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k}) \\ &-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\kappa d\ell \int_S d^2k\ \left[\sqrt{\ell^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - \ell v_F(\mathbf{k})\right. \\ &\left. -\frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{2(\ell^2 v_F^2(\mathbf{k})+\mu^2)^{1/2}} + \frac{\mu^2|\Delta(\mathbf{k})|^2}{4(\ell^2 v_F^2(\mathbf{k})+\mu^2)^{3/2}}\right] \end{aligned} \tag{21.6.73}$$

となる. ここで ℓ についての積分は切断 κ を無限大にとれば収斂し,

$$\begin{aligned} V[\Delta] = &-\int_S d^2k\, d^2k'\ \Delta^*(\mathbf{k}')V_\mu^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k}) \\ &+\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_S d^2k\ \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{v_F(\mathbf{k})}\left[\ln\left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\mu}\right) - 1\right] \end{aligned} \tag{21.6.74}$$

となる. $V[\Delta]$ が $\Delta = \Delta_0$ で停留するという条件から, より有用な形のギャップ方程式,

$$\Delta_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_S d^2k'\ V_\mu(\mathbf{k},\mathbf{k}')v_F^{-1}(\mathbf{k}')\Delta_0(\mathbf{k}')\ln\left(\frac{|\Delta_0(\mathbf{k}')|}{\mu}\right) \tag{21.6.75}$$

が得られる. これを (21.6.74) で使うと, 超伝導状態のエネルギー密度は正常状態より,

$$\Delta \equiv V(0) - V(\Delta_0) = \int_S d^2k\ \frac{|\Delta_0(\mathbf{k})|^2}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})} \tag{21.6.76}$$

だけ低いことがわかる.

もちろん電子・電子ポテンシャル V_μ の μ 依存性は, 有効ポテンシャル (21.6.74) が任意にとれるくりこみスケール μ に依らないことを保

証する以下のくりこみ群方程式を満たすように選ばなければならない. すなわち,

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_\mu^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\delta^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})}$$

あるいは, 同等なことだが,

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2k''\, V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')\, v_F^{-1}(\mathbf{k}'')\, V_\mu(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) \,. \tag{21.6.77}$$

これはエルミートな核,

$$K_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3}\, v_F^{-1/2}(\mathbf{k}')\, v_F^{-1/2}(\mathbf{k})\, V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \tag{21.6.78}$$

を使えば,

$$\mu \frac{d}{d\mu} K_\mu = K_\mu^2 \tag{21.6.79}$$

と書き換えることができて有用だ. すると $K_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ の固有ベクトル $u_n(\mathbf{k})$ は μ に依らないが, 固有値は $1/\ln(\Lambda_n/\mu)$ の形をとる. ここで Λ_n は, 量子色力学の Λ と同様の積分定数だ. したがってポテンシャルは,

$$V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2(2\pi)^3\, v_F^{1/2}(\mathbf{k})\, v_F^{1/2}(\mathbf{k}') \sum_n \frac{u_n(\mathbf{k})\, u_n^*(\mathbf{k}')}{\ln(\Lambda_n/\mu)} \tag{21.6.80}$$

の形をとる. ここで固有ベクトルは直交するように選んであるので, 完全性の式は,

$$\sum_n u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}') = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{21.6.81}$$

の形をとる. すると有効ポテンシャル (21.6.74) は,

$$V[\Delta] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2k\, d^2k' \sum_n \frac{\Delta^*(\mathbf{k}')\, u_n^*(\mathbf{k}')\, \Delta(\mathbf{k})\, u_n(\mathbf{k})}{\sqrt{v_F(\mathbf{k}')\, v_F(\mathbf{k})}} \times \left[\ln\left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\Lambda_n}\right) - 1\right] \tag{21.6.82}$$

と書ける. 局所的な回転不変性を持つ物質では, フェルミ面は球面で固有ベクトル $u_n(\mathbf{k})$ はこの球面の座標の球面調和関数だが, (21.6.82) はどのような回転不変性の仮定も無しで成り立つ.

この形式を使って, いつ超伝導が起こるのかについて知ることができる. (21.6.82) の対数は, Δ が非常に小さいとき大きな負の値で, Δ が非常に大きいときには大きな正の値なので, Δ のスケールがゼロから無限大まで増加すると, $V[\Delta]$ はゼロから負の値に落ち, それから無限大まで上昇する. したがって任意の電子・電子ポテンシャルについて Δ のゼロでない値で最小値をとる. しかしこの結果には重要な制限がある. 切断 κ を無限大にとると (21.6.73) の積分は実質的に ℓ が $|\Delta|/v_F$ の程度の値で切断される. 他方フェルミ面は k_F の程度の半径を持つ. ここで $8\pi k_F^3/3(2\pi)^3$ は電子密度に等しい. ここで考察している電子はフェルミ面近傍の薄い球殻内にあると仮定してきたので, 上記の導出は $|\Delta| \ll \omega_D$ の場合にだけ正しい. ここで ω_D は**デバイ振動数** (Debye frequency) $k_F v_F$ だ. 特に, 回転不変性がありギャップ関数に方向依存性がない場合には, 有効ポテンシャルはギャップ関数が $\Lambda_{s\ \mathrm{wave}}$ の程度のときに極小値に達し, したがって $\Lambda_{s\ \mathrm{wave}} \ll \omega_D$ である限り対称性は自発的に破れる. 別の言い方をすれば, この結果は, s 波超伝導の場合には電子・電子ポテンシャル (21.6.80) の s 波射影は $\mu \approx \omega_D$ のスケールでくりこまれたとき引力でなければならないということだ. しかしこのくりこまれた引力ポテンシャルの強さは問題ではない.

引力ポテンシャルの場合にはポテンシャルがいくら弱くてもゴールドストン・ボゾンが形成されるという超伝導のこの特徴は, 長距離効果を強めるフェルミ面の存在の結果だ. 21.5 節のようなスピン・ゼロの基本的な場が存在しない場の量子理論では, 相互作用が十分に強くなければ空の空間での自発的対称性の破れは一般に期待できない.

ここで外部電磁場の場合に戻ろう. いつものとおり, 理論の各々の荷電場 (ここではギャップ場 $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ あるいは同等なことだが対場

$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$) を, 対応するゲージ不変なチルダで区別された場にゲージ・パラメータ $\phi(\mathbf{x}, t)$ のゲージ変換を作用させたものと書くことで, ゴールドストン・ボゾン場 $\phi(\mathbf{x}, t)$ を導入できる.

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \exp\Big(-i\phi(\mathbf{x}, t)\Big)\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \exp\Big(-i\phi(\mathbf{x}', t)\Big) . \quad (21.6.83)$$

そして有効作用は (21.6.83) を (21.6.59) に代入して得られる. その際に (21.6.60) の $A_\mu(x)$ を $A_\mu(x) - \partial_\mu\phi(x)$ で置き換えれば, ゲージ変換によって, (21.6.83) の ϕ 依存性を取り除くことができる. 物質が超伝導状態にあるだけでなく正常状態と超伝導状態との間の転移点から遠ければ, $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ に付随するゲージ不変な自由度も積分してしまってよい. このことは単にそれを平衡値 $\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ で置き換えることを意味する. するとゴールドストン場と外部電磁場に依存する有効作用の部分は,

$$\Gamma[\phi, A] = \Gamma_{\Delta=0}[A] - i \ln \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix} + i \ln \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix} \quad (21.6.84)$$

となる. ただしここでは,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \Big[-i\frac{\partial}{\partial t} + eA_0(\mathbf{x}, t) - e\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + E\Big(-i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}, t)\Big)\Big] \times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t) , \quad (21.6.85)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \Delta_0(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t) \quad (21.6.86)$$

とする. 侵入深度のような超伝導体の定量的な性質は, (21.6.84) の $A_0(\mathbf{x}, t) - \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}, t)$ についての展開から読みとることができる.[46]

補遺：一般のユニタリー・ゲージ

この補遺では, 一般の自発的に破れたゲージ理論ではゴールドストン・ボゾン場が (21.4.30),

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{\alpha b} = 0 \tag{21.A.1}$$

を満たす「ユニタリー」ゲージを採用することが常に可能なことを示す.

全ての群について指数関数によるパラメータ化を使うと, まずわかることは, 少なくとも 1 の有限な近傍では G のどの元も,

$$g = \exp\left(-i\sum_\alpha \theta_\alpha \mathcal{T}_\alpha\right) \exp\left(i\sum_a \phi_a x_a\right) \exp\left(i\sum_i \mu_i t_i\right) \tag{21.A.2}$$

の形に表せることだ. ここで ϕ_a は全ての α について線形の拘束条件,

$$\sum_{ab} F_{ab}^2\, \phi_a\, e_{\alpha b} = 0 \tag{21.A.3}$$

を満たす. これは, g が 1 に限りなく近いときには容易にわかる. そのような任意の g は ϕ_a^0 と μ_i^0 を微小量として,

$$g = 1 + i\sum_a \phi_a^0\, x_a + i\sum_i \mu_i^0\, t_i \tag{21.A.4}$$

と書ける. 同等に,

$$g = 1 + i\sum_i \phi_a x_a + i\sum_i \mu_i t_i - i\sum_\alpha \theta_\alpha \mathcal{T}_\alpha \tag{21.A.5}$$

とも書ける. ここで θ_α は任意の微小量で,

$$\phi_a(\theta) \equiv \phi_a^0 + \sum_\alpha \theta_\alpha e_{\alpha a}\ , \tag{21.A.6}$$

$$\mu_i(\theta) \equiv \mu_i^0 + \sum_\alpha \theta_\alpha e_{\alpha i} \tag{21.A.7}$$

とする. どのような ϕ_a^0 についても, 正の量,

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \phi_a(\theta)\phi_b(\theta) \tag{21.A.8}$$

を最小にするように θ_α を選ぶことができる. この最小点で, (21.A.8) は θ_α に関して停留するので, $\phi_a(\theta)$ は (21.A.3) を満たす. ϕ, μ, θ が微小ならば, (21.A.5) は (21.A.2) と同じなので, (21.A.2) の形の全ての g の組は (ϕ_a は (21.A.3) を満たすとして), 1 に無限に近い全ての g を含む. すると連続性から少なくとも 1 のある有限な近傍では全ての g について同じことが成り立つ.

次に, 特定の群の要素,

$$g = \gamma(\xi) = \exp\left(i\sum_a \xi_a x_a\right) \tag{21.A.9}$$

を考え, これを (21.A.2) の形,

$$\gamma(\xi) = \exp\left(-i\sum_\alpha \theta_\alpha(\xi)\mathcal{T}_\alpha\right)\gamma\left(\phi(\xi)\right)\exp\left(i\sum_i \mu_i(\xi)t_i\right) \tag{21.A.10}$$

に書いてみよう. ここで $\phi_a(\xi)$ は (21.A.3) を満たすとする. これはちょうど, ゲージ変換 $\exp\left(i\sum_\alpha \theta_\alpha(\xi)\mathcal{T}_\alpha\right)$ により ξ_a が

$$\xi'_a = \phi_a(\xi) \tag{21.A.11}$$

に変換されることを意味する. ここでプライム (′) を落とすと, ξ_a が (21.A.1) を満たすゲージを作ることに成功したことになる. これが示したかったことだ.

問題

1. 「一般化されたユニタリー・ゲージ」でゴーストの有効ラグランジアンを計算せよ．ただしこのゲージでは, $B[f]$ は通常どおり (15.5.22) で与えられるが, $f_\alpha(x) = i\phi_n(x)(t_\alpha)_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{VAC}$ だ．ここで ϕ_n は実スカラー場, t_α はゲージ群のリー代数を表す虚数の反対称行列だ．ゴーストのプロパゲーターはどのようになるか．ラグランジアンのこの部分はくりこみ可能か．

2. $SU(2)\times U(1)$ の電弱理論で, もしゲージ対称性が通常の複素 2 重項 (ϕ^0, ϕ^-) ではなく実 3 重項 $\vec{\phi} = (\phi^+, \phi^0, \phi^-)$ に属する場 ϕ_3 の真空期待値によって破れているとするとどういう影響があるか．

3. スカラー 2 重項を 1 個だけ持つ標準的な電弱理論を考える．Z^0 および中性スカラーの交換がミュー中間子の異常磁気モーメントに及ぼす効果を1 ループの次数で計算せよ．

4. 標準的な電弱理論で W^+ と Z^0 粒子の最低次での磁気モーメントはいくらか．

5. 第 4 世代のクォークとレプトンが発見されると21.5 節で述べた強い相互作用と電弱相互作用の統一理論の予言にどのような影響があるか．

6. 超伝導体で通約できない電荷の値を持ついくつかの場がゼロでない真空期待値を持つとする．これは 21.6 節で述べた超伝導体の性質にどのような影響を及ぼすか．

参考文献

1. J. Goldstone. *Nuovo Cimento* **9**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).

2. P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964); *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964); *Phys. Rev.* **145**, 1156 (1966); F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321 (1964); G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585 (1964); T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155**, 1554 (1967); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 507 (1967) 脚注 7.

3. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967). A. Salam, *Elementary Particle Physics*, N. Svartholm 編 (Almqvist and Wiksells, Stockholm,1968) p. 367.

3*a*. ユニタリー・ゲージでの一般的なゲージ理論のファインマン則はS. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1068 (1973) で与えられた.

4. G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971); B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D5**, 823 (1972).

5. K. Fujikawa , B. W. Lee, and A. Sanda, *Phys. Rev.* **D6**, 2923 (1972).

5*a*. B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* **D7**, 1049 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972); B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D9**, 933 (1974).

6. H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1494 (1972).

7. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **98**, 101 (1955).

8. 不完全な $SU(2)\times U(1)$ 対称性を持つ模型はS. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961); A. Salam and J. Ward, Phys. Lett. **13**, 168 (1964) により提案された. また J. Schwinger, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2**, 407 (1957) も見よ.

9. 可能な中性カレントの考察は以下の仕事に遡る. G. Gamow and E. Teller, *Phys. Rev.* **51**, 288 (1937); N. Kemmer, *Phys. Rev.* **52**, 906 (1937); G. Wentzel, *Helv. Phys. Acta* **10**, 108 (1937); S. Bludman, *Nuovo Cimento* **9**, 433 (1958); J. Leites-Lopes, *Nucl. Phys.* **8**, 234 (1958).

10. 中性カレントは最初に CERN での $\bar{\nu}_\mu - e^-$ 散乱の 1 個の事象で観測された. F. J. Hasert *et al.* (Aachen–Brussels–CERN–Ecole Polytechnique–Milan–Orsay–London collaboration), *Phys. Lett.* **46**, 121 (1973).

11. N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).

12. I. S. Towner, E. Hagberg, J. C. Hardy, V. T. Koslowsky, and G. Savard, Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995).

13. S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2**, 1285 (1970).

14. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1688 (1971); *Phys. Rev.* **5**, 1413 (1972).

15. J. J. Aubert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404 (1974); J. E. Augustin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).

16. M. L. Perl *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1489 (1975).

17. S. W. Herb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 252 (1977).

18. F. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2626 (1995); S. Abachi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2632 (1995).

19. フェルミ研究所での CDF 共同実験と D0 共同実験により与えられた値はそれぞれ $176 \pm 8 \pm 10$ GeV (F. Abe *et al.*, 文献 18) と $199^{+19}_{-21} \pm 22$ GeV (S. Abachi *et al.*, 文献 18) だ. ここで 1 番目と 2 番目の誤差はそれぞれ統計誤差と系統的誤差だ. J. Ellis, G. L. Fogli, and E. Lisi, *Z. Phys.* **C69** 627 (1996) により, これらの結果は合わせると 181 ± 12 GeV の値を与えると解釈されている.

20. M. Kobayashi and K. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 282 (1972).

20*a*. F. J. Gilman, K. Kleinknecht, and B. Renk, Carnegie Mellon–Mainz preprint CMU-HUP95-19–DOE-ER/40682- 107 (1995), 1995 *Review of Particle Properties* に掲載.

20*b*. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 657 (1976). スカラー場が CP と T の非保存の原因になる模型でこれ以前のものについては T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D8**, 1226 (1973); *Phys. Rep.* **9C**, 143 (1974) を見よ.

21. F. J. Hasert *et al.*, *Phys. Lett.* **46B**, 138 (1973); P. Musset, *Jour. de Physique* **11/12**, T34 (1973). 中性カレントの事象はほぼ同時にフェルミ研究所で Harvard–Pennsylvania–Wisconsin–Fermilab グループにより観測されたが, 彼らの論文は発表が遅れた. そこで彼らはこれを機会に検出器を作り直したが, 最初は同じ事象を捉えることができなかった. このグループによる中性カレントの証拠は A. Benvenuti *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 800 (1974) に発表された.

22. G. Arnison *et al.* *Phys. Lett.* **122B**, 103 (1983); **126B**, 398 (1983); **129B**, 273 (1983); **134B**, 469 (1984); **147B**, 241 (1984).

23. F. Abe et al. (CDF collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **75**, 11 (1995). この実験では W の質量は $W \to \mu + \nu$ と $W \to e + \nu$ の崩壊の観測で測定された.

24. CERN 報告書 LEPEWWG/95-01, 未発表 (1995).

25. M. Green and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B169**, 137 1980); V. A. Novikov, L. B. Okun', and M. I. Vysotsky, *Nucl. Phys.* **B397**, 35 (1992). 以降の研究については以下を見よ. P. Langacker, *Precision Tests of the Standard Model* (World Scientific, Singapore, 1994); P. Bamert, C. P. Burgess, and I. Maksymyk, *Phys. Lett.* **356B**, 282 (1995); W. Hollik, Karlsruhe preprint hep-ph/9507406 (1995) [Invited talk at 15th International Conference on Physics in Collision (PHYSCOLL95), Cracow, Poland, 8-10 Jun 1995, in *Physics in Collision* p.155].

26. S. Fanchotti, B. Kniehl, and A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D48**, 307 (1973) およびその引用文献.

27. J. Ellis, G. L. Fogli, and E. Lisi, 文献 19.

27*a*. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1566 (1979).

27*b*. 例えば, いわゆるシーソー機構では, この次数のニュートリノの質量は質量 M の重い中性レプトンの交換により生じる. M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, *Supergravity*, P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman 編 (North Holland, Amsterdam, 1979) p. 315; T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **B135**, 66 (1978) を見よ.

27*c*. S. Weinberg, 文献 27a; F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1571 (1979). また S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D22**, 1694 (1980) も見よ.

28. この一般的な形式は S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D13**, 974 (1976) により説明された. ゲージ理論での動的対称性の破れに関するそれ以前の研究については, R. Jackiw and K. Johnson, *Phys. Rev.* **D8**, 2386 (1973); J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Phys. Rev.* **D8**, 3338 (1973) を見よ.

29. 標準理論の結果のこの解釈は L. Susskind, 文献 30 による.

30. S. Weinberg, 文献 28 および *Phys. Rev.* **D19**, 1277 (1979); L. Susskind, *Phys. Rev.* **D19**, 2619 (1979). 「テクニカラー」という用語は Susskind による.

31. S. Dimopoulos and L. Susskind, *Nucl. Phys.* **B15**, 237 (1979); E. Eichten and K. Lane, *Phys. Lett.* **90B**, 125 (1980); S. Weinberg, 未発表だが Eichten and Lane に引用されている. 概説については E. Farhi and L Susskind, *Phys. Rep.* **74**, 277 (1981) を見よ.

32. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D5**, 1962 (1972).

33. J. Pati and A. Salam, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 275 (1973).

34. H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).

35. H. Georgi, *Particles and Fields — 1974*, C. Carlson 編 (Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).

36. H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 451 (1974).

36*a*. S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193**, 150 (1981); J. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **B260**, 131 (1991); U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstmann, *Phys. Lett.* **B260**, 447 (1991). データのより最近の解析については P. Langacker and N. Polonsky, *Phys. Rev.* **D47**, 4028 (1993); **D49**, 1454 (1994); L. J. Hall and U. Sarid, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2673 (1993) を見よ.

36*b*. S. Dimopoulos, S. Raby and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D24**, 1681 (1981)

37. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).

38. P. M. Anderson *Phys. Rev.* **130**, 439 (1963).

39. S. Weinberg, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No. 86, 43 (1986).

40. B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 25 (1962).

41. V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *JETP (USSR)* **20**, 1064 (1950).

42. L. P. Gor'kov, *Soviet Phys. JETP* **9**, 1364 (1959).

43. A. A. Abrikosov, *Soviet Phys. JETP* **5**, 1174 (1957).

43*a*. E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976). 数値計算については E. B. Bogomol'nyi and A. I. Vainshtein, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23**, 588 (1976) を見よ.

44. G. Benfatto and G. Gallavotti, *J. Stat. Phys.* **59**, 541 (1990); *Phys. Rev.* **42**, 9967 (1990); J. Feldman and E. Trubowitz, *Helv.*

Phys. Acta **63**, 157 (1990); **64**, 213 (1991); **65**, 679 (1992); R. Shankar, *Physica* **A177**, 530 (1991); *Rev. Mod. Phys.* **66**, 129 (1993); J. Polchinski, *Recent Developments in Particle Theory, Proceedings of the 1992 TASI*, J. Harvey and J. Polchinski 編 (World Scientific, Singapore, 1993).

44*a*. S. Weinberg, *Nucl. Phys.* **B413**, 567 (1994).

45. R. L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 416 (1957); J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1959).

46. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, I. Ye. Dzyaloshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, 第 2 版, D. E. Brown 英訳 (Pergamon Press, Oxford, 1965).

47. 質量 M の正確な意味を与えるにはくりこみ群方程式 (21.5.6)–(21.5.8) への 2 ループ補正と条件 (21.5.5) への 1 ループの「閾補正」(threshold correction) との両方を考慮する必要がある. S. Weinberg, *Phys. Lett.* **82B**, 387 (1979) を見よ.

第22章

アノマリー

場の量子論においては, 対称性の帰結には微妙な点があり, 古典的理論にはこれに対応するものが無い. くりこみ可能な理論においてさえ, 実際の計算においては場の量子論の無限大のために何らかの正則化もしくは切断定数が必要だ. この正則化因子は理論の対称性を破る場合があり, 計算の最後にこの正則化を取り除いても, この対称性の破れの痕跡が残る場合がある. 最初, この問題は中性パイ中間子の崩壊率を理解するために, 強い相互作用の大域的対称性の破れを破る**アノマリー** (anomaly) として発見された. アノマリーはまたゲージ対称性をも破ることができる. しかし, この場合には理論は矛盾したものとなり, アノマリーが相殺することが物理的なゲージ理論としての拘束条件となる. 次の章で, 場の理論に自明でないトポロジー的な配位があるときのアノマリーの非摂動的効果を調べるが, アノマリーは重要であることがそこでより一層明らかになる.

22.1 π^0 崩壊の問題

19章で述べたように, 1960 年代半ばにはパイ中間子を強い相互作用の $SU(2) \otimes SU(2)$ 対称性の自発的破れに伴うゴールドストン・ボゾンだとする描像が幾ばくかの成功を収めていた. しかし, この描像には極端な失敗も幾つかあった. その最も顕著なものは, 中性パイ中間子の主な崩壊である $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊率に関するものだった. この問題の解決が対称性を破るアノマリーの発見につながった.

重い束縛された粒子を全て積分した後には, $\pi^0 \to 2\gamma$ の有効ラグランジアンは以下のゲージ不変でローレンツ不変な微分を3つ以上持たない唯一の項で与えられると考えられる.

$$\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = g\pi^0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \ . \tag{22.1.1}$$

ここで g は [質量]$^{-1}$ の次元を持つ未知の定数だ. 3.4節の方法を使うと $\pi^0 \to 2\gamma$ の反応率をこれより計算できる.

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi} \ . \tag{22.1.2}$$

単純に考えれば g は

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi} \tag{22.1.3}$$

の大きさだと期待できる. ここで, $F_\pi \simeq 190$ MeV を強い相互作用の典型的な質量の大きさとして使い, $\pi^0 \to 2\gamma$ 過程を引き起こすダイアグラムは最低限1ループを含むので因子 $1/8\pi^2$ を入れた. たとえば, 1949 年には相互作用ラグランジアン $iG_{\pi N}\vec{\pi} \cdot \bar{N} 2\vec{t}\gamma_5 N$ を持つパイ中間子と核子の QCD 以前の理論において, スタインバーガー (Steinberger)[1] は陽子のループを一つ持つ三角ダイアグラムからの g への寄与を以下のように求めた.

$$g_\triangle = \frac{e^2 G_{\pi N}}{32\pi^2 m_N} \ . \tag{22.1.4}$$

ゴールドバーガー・トライマン関係式 (19.4節を見よ) より $G_{\pi N} = 2m_N g_A/F_\pi$ なので, これは数値的には (22.1.3) とほとんど変わらない.

この $\pi^0 \to 2\gamma$ の振幅の計算では $SU(2) \otimes SU(2)$ 対称性による特別な拘束条件を考えていない. 電磁相互作用はこの対称性をほぼ完全に破るが, $SU(2) \otimes SU(2)$ の電気的に中性な生成子によって生成される $U(1) \times U(1)$ 対称性に, 少なくとも形式的には影響は無い. この部分群の微小な擬スカラー要素は以下のようにクォークに作用する.

$$\delta u = i\epsilon\gamma_5 u\ , \qquad \delta d = -i\epsilon\gamma_5 d\ . \tag{22.1.5}$$

そのため電磁カレントは不変だ.

$$\delta\left[\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d\right] = 0\ . \tag{22.1.6}$$

(この議論は, 量子色力学以前に u クォークと d クォークの代りに陽子と中性子を使ってサザランド (Sutherland)[2] とベルトマン (Veltman)[3] によってなされた.) π^0 はこの対称性に伴うゴールドストン・ボゾンだから, (22.1.1) のような微分を持たない相互作用は, この対称性がクォークの質量で破られて初めて可能となる. したがって, この相互作用は $m_\pi^2 \propto m_u + m_d$ に比例しなければならない. これに留意すると, 定数 g は余分な因子 m_π^2/m_N^2 で押さえられる.[2,3]

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi}\left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2}\right)\ . \tag{22.1.7}$$

(m_N の代りに19.3節で議論したカイラル対称性を破るスケール $2\pi F_\pi = 1200$ MeV を使ってもよいが, 結果はあまり変わらない.) π^0 場の微分を含むカイラル不変な有効相互作用 $\pi^0\gamma\gamma$ も存在する. ローレンツ不変性からこれらは最低二つの微分を含まなければならない. 斉次マックスウェル方程式 $\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\mu\lambda} = -\partial_\lambda F_{\mu\nu}$ と部分積分を使うと, 微分を二つだけ余分に持ったカイラル不変な結合で独立なものは, ただ一つだけ, (22.1.1) でダランベリアンを π^0 場に働くように挿入

したものだとわかる. パイ中間子の質量殻上では, これは単に相互作用 (22.1.1) に余分な因子 m_π^2 がかかったもので, (22.1.7) と同じ結果となる. ときに, カイラル対称性は $\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊を禁止すると言われるが, カイラル対称性はこの過程の反応率を $m_\pi \to 0$ のときに m_π^3 ではなく m_π^7 のように振舞わせるという方が正確だ.

困難なのは $\pi^0 \to 2\gamma$ の反応率の測定値が (22.1.7) から期待されるよりもずっと大きいということだ. 実際, それは素朴な結果 (22.1.3) から得られる値に非常に近い. 具体的には (22.1.7) と (22.1.2) からは崩壊率が,

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^7 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2 m_N^4} = 1.9 \times 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{22.1.8}$$

となる. 一方, (22.1.7) の代りに (22.1.3) を使うと,

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^3 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2} = 4.4 \times 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{22.1.9}$$

を得る. 観測値は $\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = (1.19 \pm 0.08) \times 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$ で, これは上の素朴な概算値 (22.1.9) と満足できる程度に一致していて, 「改善された」結果 (22.1.8) よりはほぼ3桁も大きい! これより, g について m_π^2/m_N^2 の余分な因子をもたらす何か異常な (anomalous) ものがカイラル対称性を破っていると結論付けざるを得ない. 他の $\eta^0 \to \gamma + \gamma$ のような過程の崩壊率についても同様の問題が発生する.

1969 年にベル (Bell) とジャッキーフ (Jackiw)[4] は, この**アノマリー**は1ループのファインマン・ダイアグラムにおいて中性軸性カレントの保存を導くために必要な正則化因子がカイラル対称性を破ることによって生じることを突き止めた. 彼らの結果は, 彼らとは独立に量子電磁気学の軸性カレントのワード恒等式を調べてカイラル・アノマリーを発見したアドラー (Adler)[5] によって, 確証され, 一般化され, 高次へ拡張された. やがて, 1979年に藤川[6] は, 場の理論の経路積分による定式化では, カイラル対称性の破れを引き起こすアノマリーはフェ

ルミオン場の経路積分を定義する測度のみに現れることに気付いた.この方法を使うと,摂動の全ての次数にわたってこのアノマリーが与える $\pi^0 \to 2\gamma$ の振幅を計算するのが簡単になる.これを次の節で見る.その後に,より一般の理論でのアノマリーの直接計算に戻り,さらに各種の応用を論じる.

22.2 測度の変換：可換アノマリー

さて,π^0 崩壊に関連する種類のアノマリーの計算を行おう.このためにここでは,アノマリーはフェルミオン場の変数について積分測度を不変となるように定義することができないという徴候によるとの藤川の解釈[6]を採用する.この問題の藤川の解析は虚時間経路積分を使い,フェルミオン的積分変数をゲージ不変ディラック演算子の固有関数で展開することにもとづいている.このゲージ不変ディラック演算子は4次元ユークリッド空間ではエルミートだ.ここでは最初に,それほど厳密ではない導出を与える.それは慣れ親しんだミンコフスキー空間での経路積分であり,これにより最小限の作業で正しい結果が得られる.ユークリッド空間での扱いはこの節の最後に簡単に与える.それにより有名な指標定理が得られる.

まず,質量ゼロのスピン 1/2 複素フェルミオン場の列ベクトル $\psi_n(x)$ についての任意の局所行列変換 $\psi(x) \to U(x)\psi(x)$ のもとでの測度のアノマリーを計算する.このフェルミオン場はゲージ場の集合 $A_\alpha^\mu(x)$ と非カイラル的に相互作用する.(たとえばこれは,$\pi^0 \to 2\gamma$ の反応率を計算する問題では,u クォーク場と d クォーク場が電磁ベクトル・ポテンシャル $A^\mu(x)$ と相互作用する場合を考える.) これらはフェルミオン変数なので,測度は変換行列の行列式ではなく,その逆数で変換する.

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to (\mathrm{Det}\,\mathcal{U}\ \mathrm{Det}\,\bar{\mathcal{U}})^{-1}[d\psi][d\bar{\psi}]\ . \tag{22.2.1}$$

ここで,

$$\mathcal{U}_{xn,ym} \equiv U(x)_{nm}\delta^4(x-y) \; , \tag{22.2.2}$$

$$\bar{\mathcal{U}}_{xn,ym} \equiv [\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4]_{nm}\delta^4(x-y) \tag{22.2.3}$$

であり, $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ は $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$ を定義するのに使った行列だ. 添字 n と m はフレーバーとディラックのスピンの添字をとる.

読者はここで, (22.2.3) において γ_4 の因子等を入れても, それらはユニタリー変換に相当して行列式には影響しないのに, なぜそれらを含む必要があるのか不思議に思うかもしれない. その答えは, 意味のある計算をするにはプロパゲーターや行列式においてフェルミオンのモードについての和を正則化する必要があり, 正則化された行列式には γ_4 が実際に影響することにある. γ_4 因子を含むかどうかは, これらの大雑把な計算を意味のあるようにする正規化の方法による. ここではローレンツ不変性を保存するように正規化を行いたい. そのため, いまの場合 $U(x)^\dagger$ ではなく $\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4$ がスカラーとして変換するので γ_4 因子を含める必要がある.

まず, $U(x)$ がユニタリーな非カイラル的変換,

$$U(x) = \exp[i\alpha(x)t] \tag{22.2.4}$$

である場合を考える. ここで t は (γ_5 を含まないが必ずしもトレースゼロである必要は無い) 通常のエルミート行列だ. また $\alpha(x)$ は x の任意の実関数だ. この場合は $\mathcal{U}$ は擬ユニタリー,

$$\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} = 1 \tag{22.2.5}$$

となる. したがって測度はこの種の変換のもとで不変だ. 特に ゲージ群自身の対称性において, t は非カイラル生成子の一つ t_α になっていて, この対称性がアノマリーによって破られることはない.

次に, 以下の局所カイラル変換を考える.

$$U(x) = \exp[i\gamma_5 \alpha(x) t] \ . \tag{22.2.6}$$

ここで前と同様, t は通常のエルミート行列, $\alpha(x)$ は x の任意の実関数だ. この場合 $\mathcal{U}$ は擬エルミートだ.

$$\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \ . \tag{22.2.7}$$

測度がカイラル変換のもので不変ではなく,

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to (\mathrm{Det}\,\mathcal{U})^{-2}[d\psi][d\bar{\psi}] \tag{22.2.8}$$

となる.

さて, 微小局所カイラル変換の場合に特定しよう. (22.2.6) において $\alpha(x)$ を微小にとると,

$$[\mathcal{U} - 1]_{nx,my} = i\alpha(x)[\gamma_5\, t]_{nm}\, \delta^4(x-y) \tag{22.2.9}$$

を得る. 恒等式 $\mathrm{Det} M = \exp \mathrm{Tr} \ln M$ と $x \to 0$ の極限での表式 $\ln(1+x) \to x$ を使うと, 測度は以下の変換則を満たす.

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to \exp\left\{ i \int d^4x\ \alpha(x)\mathcal{A}(x) \right\}\ [d\psi][d\bar{\psi}] \ . \tag{22.2.10}$$

ここで $\mathcal{A}$ はアノマリー関数,

$$\mathcal{A}(x) = -2\,\mathrm{Tr}\,\{\gamma_5 t\}\, \delta^4(x-x) \tag{22.2.11}$$

だ. ここで「Tr」はディラックと種類の両方の添字についてのトレースを意味する. 測度 $[d\psi][d\bar{\psi}]$ は経路積分において因子 $\exp\{i \int d^4x\ \mathcal{L}(x)\}$ の重み付きで現れる. そのため測度の変換則 (22.2.10) の因子 $\exp\left\{i \int d^4x\ \alpha(x)\mathcal{A}(x)\right\}$ は, あたかもラグランジアン密度 $\mathcal{L}(x)$ がこれらの変換で不変でなく, その代りに $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha(x)\mathcal{A}(x)$ とな

るのと同じ影響をする. したがって, フェルミオンを積分した有効ラグランジアンを扱う時には, アノマリーを考慮に入れて, 不変でない項を,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \to \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) + \alpha(x)\mathcal{A}(x) \tag{22.2.12}$$

となるように入れておかなければならない. 残ったのは, このアノマリー関数の計算だ.

一見, アノマリーについては何らの一義的な結果を得ることもできないように思える. デルタ関数は無限大だが, トレースはゼロとなる. これを改善するために, $\delta^4(x-x)$ を意味あるようにするための正則化因子を導入する. これは, デルタ関数の引数がゼロになる前に微分演算子 $f(-\not{D}_x^2/M^2)$ をデルタ関数に働かせることによりゲージ不変に実行できる.

$$\mathcal{A}(x) = -2\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t\, f(-\not{D}_x^2/M^2)\right\}\delta^4(x-y)\right]_{y\to x} . \tag{22.2.13}$$

ここで, D_x はゲージ場 $A_\alpha^\mu(x)$ があるもとでのディラック演算子だ.

$$(D_x)_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} - it_\alpha A_{\alpha\mu}(x) . \tag{22.2.14}$$

また, M はある大きな質量で, いずれは無限大の極限をとる. また, $f(s)$ はある滑らかな関数で, s が 0 から ∞ に行くにつれて $f(s)$ は 1 から 0 に滑らかに落ちるという条件* のみを満たせばよい.

$$f(0) = 1 , \qquad f(\infty) = 0 , \tag{22.2.15}$$

$$sf'(s) = 0 \qquad s = 0 \text{ と } s = \infty \text{ において} . \tag{22.2.16}$$

正則化関数はゲージ不変性を保つために $\not{\partial}$ の関数にはとらず, また, 行列式のみならずフェルミオン・プロパゲーター $\not{D}^{-1}$ も正則化する必要があるために, $D^\mu D_\mu$ の関数にはとらないということに注意しよう.

*たとえば, 藤川のように $f(s) = e^{-s^2}$ ととってもよいし, $f(s) = 1/(1+s)$ でもよい.

(22.2.13) の表式を計算するためにデルタ関数のフーリエ表現を使い, アノマリー関数を,

$$\mathcal{A}(x) = -2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\, t\, f(-\not{D}_x^2/M^2)\right\}e^{ik\cdot(x-y)}\right]_{y=x}$$
$$= -2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\, t\, f\Big(-[i\not{k}+\not{D}_x]^2/M^2\Big)\right\}$$

と書く. (x についての微分は第2番目の表現の一番右に働くとゼロとなるが $A_{\alpha\mu}(x)$ に働いたときはゼロとはならない.) 運動量 k^μ を因子 M だけスケールを変えると,

$$\mathcal{A}(x) = -2M^4\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\, t\, f\Big(-[i\not{k}+\not{D}_x/M]^2\Big)\right\} \tag{22.2.17}$$

となる. 切断関数の変数は,

$$-\left[i\not{k}+\frac{\not{D}_x}{M}\right]^2 = k^2 - \frac{ik\cdot D_x}{M} - \left(\frac{\not{D}_x}{M}\right)^2 \tag{22.2.18}$$

と書ける. $M\to\infty$ の極限では, (22.2.17) は $f(-[i\not{k}+\not{D}_x/M]^2)$ の展開のなかで $1/M$ の因子を5個以上持たない項と, ディラックのガンマ行列を最低4個持つ項のみから寄与を受ける. これは, そうでないとディラックの添字についてのトレースが消えるからだ. これにより $\not{D}_x^2$ について2次の項のみが残る.

$$\mathcal{A}(x) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,f''(k^2)\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\, t\,\not{D}_x^4\right\}\ . \tag{22.2.19}$$

これは正則化質量 M に独立だ.

k 積分を計算するには, k^0 の積分経路をファインマン・ダイアグラムを計算する際と同様に回転させる. その結果, k^0 は ik^4 に置き換わり, k^4 は $-\infty$ から $+\infty$ まで動く. (この過程は, 当初から虚時間経路積分で計算することで初めて正当化できる.) 積分は結局,

$$\int d^4k\, f''(k^2) = i\int_0^\infty 2\pi^2\kappa^3\, d\kappa\, f''(\kappa^2) \tag{22.2.20}$$

となる. (22.2.16) と (22.2.15) を使って繰り返し部分積分をすると,

$$\int d^4k\, f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds\, s\, f''(s) = -i\pi^2 \int_0^\infty ds\, f'(s) = i\pi^2 \tag{22.2.21}$$

となる. トレースを計算するには,

$$\begin{aligned} \not{D}_x^2 &= \tfrac{1}{4}\{(D_x)^\mu, (D_x)^\nu\}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \tfrac{1}{4}[(D_x)^\mu, (D_x)^\nu][\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= D_x^2 - \tfrac{1}{4} i t_\alpha F_\alpha^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{aligned} \tag{22.2.22}$$

と書く. $\not{D}_x^4$ でディラック添字についてのトレースに寄与するのは, 4 つのディラック行列の積を含む以下のものだけだ.

$$\mathrm{tr_D}\, \{\gamma_5\, [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\, [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\} = 16\, i\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{22.2.23}$$

ここで, 「$\mathrm{tr_D}$」はディラック添字のみについてのトレースを意味し, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は通常の $\epsilon^{0123} = +1$ となる完全反対称テンソルだ. (22.2.19) において (22.2.21)–(22.2.23) を使うとアノマリー関数が,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, F_\alpha^{\mu\nu}(x)\, F_\beta^{\rho\sigma}(x)\, \mathrm{tr}\, \{t_\alpha\, t_\beta\, t\} \tag{22.2.24}$$

と得られる. ここで「tr」は各種のフェルミオンの種類のみについてのトレースだ. t が単位行列だという特別な場合には, 量 (22.2.24) は**チャーン・ポントリャーギン密度** (Chern–Pontryagin density) として知られている.

この結果はアノマリーを持つ対称性に伴うカレントを使って表すことができる. 簡単のために, 定数の微小パラメータ α の対称性変換 $\psi(x) \to \psi(x) + it\gamma_5\alpha\psi(x)$ のもとで作用自身が不変だとする. その場合, 7.3 節で論じたように時空に依存するパラメータ $\alpha(x)$ で変換を行うと, 作用には $\delta I = \int d^4x\, J_5^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)$ だけの変化が生じる. ここで $J_5^\mu(x)$ は, 場についての任意の変化のもとで作用が停留するように場の演算子が動的な方程式を満たすときには保存されるカレントだ.

$\delta\psi(x) = it\gamma_5\alpha(x)\psi(x)$ という変数変換を行うと, フェルミオン場の経路積分の変化は,

$$\delta\int[d\psi][d\bar{\psi}]\,e^{iI} = i\int d^4x\int[d\psi][d\bar{\psi}][\mathcal{A}(x)\alpha(x) + J_5^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)]e^{iI} \tag{22.2.25}$$

だ. しかし, これは単に変数変換なので, 任意の $\alpha(x)$ について経路積分に影響しない. したがって任意のゲージ場について,

$$\langle\partial_\mu J_5^\mu\rangle_A = \mathcal{A} = -\frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F_\alpha^{\mu u\nu}\,F_\beta^{\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\{t_\alpha\,t_\beta\,t\} \tag{22.2.26}$$

となる. ここで, 任意の演算子 $\mathcal{O}$ について, $\langle\mathcal{O}\rangle_A$ は固定された背景場 $A^\mu(x)$ のもとでの $\mathcal{O}$ の量子平均だ.

$$\langle\mathcal{O}\rangle_A \equiv \frac{\int[d\psi][d\bar{\psi}]\,e^{iI}\,\mathcal{O}}{\int[d\psi][d\bar{\psi}]\,e^{iI}}\;. \tag{22.2.27}$$

ところで, 表式 (22.2.26) を保存条件に書きかえることもできる. $\mathrm{tr}\,\{t_\alpha\,t_\beta\,t\}$ が $\delta_{\alpha\beta}$ に比例する特別の場合を考える.

$$\mathrm{tr}\,\{t_\alpha\,t_\beta\,t\} = N\delta_{\alpha\beta}\;. \tag{22.2.28}$$

チャーン・サイモンズ類 (Chern–Simons class) として知られるカレントを定義する.

$$\begin{aligned} G^\mu &\equiv 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left[A_{\gamma\nu}\partial_\lambda A_{\gamma\rho} + \frac{1}{3}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\nu}A_{\beta\lambda}A_{\gamma\rho}\right] \\ &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left[A_{\gamma\nu}\,F_{\gamma\lambda\rho} - \frac{1}{3}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\nu}A_{\beta\lambda}A_{\gamma\rho}\right]\;. \end{aligned} \tag{22.2.29}$$

これは恒等式,

$$\partial_\mu G^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,F_{\gamma\mu\nu}\,F_{\gamma\lambda\rho} \tag{22.2.30}$$

を満たす. (22.2.30) を使うと (22.2.26) を条件,

$$\partial_\mu K^\mu = 0 \tag{22.2.31}$$

と書きかえることができる. ここで,

$$K^\mu \equiv \left\langle J_5^\mu \right\rangle_A + \frac{N}{8\pi^2} G^\mu \tag{22.2.32}$$

だ. しかし, カレント K^μ の保存則を使って, 前の節でしたように $\pi^0 \to 2\gamma$ 過程が抑えられると論じることはできない. これはその議論では軸性カレントに伴うカイラル対称性のみならず, 電磁ゲージ不変性も仮定したが, (22.2.29) からわかるようにカレント K^μ は保存されてはいるがゲージ不変でないからだ.

アノマリーの表式 (22.2.24) の導出を見ると, (22.2.13) において $f(-\not{D}_x^2/M^2)$ の代りに微分演算子 $f(-\not{\partial}_x^2/M^2)$ を使って計算すればアノマリー関数がゼロとなることがわかる. 実際, この正則化の過程では軸性カレントは J_5^μ ではなく K^μ だ. このやり方の問題点は, 上に述べたように, 正則化演算子がゲージ不変でなく, そのために K^μ にゲージ不変でない項が生じることだ. フェルミオン・プロパゲーターと行列式にはゲージ不変で, かつカイラル不変な正則化の方法は存在しない.

さてアノマリーの話の原点となった問題に戻り, 上の結果を使い $\pi^0 \to 2\gamma$ 過程の実際の反応率を計算しよう. 興味のある対称性は軽いクォーク場の中性なカイラル変換によって生成される.

$$\delta u = i\alpha\gamma_5 u\,, \qquad \delta d = -i\alpha\gamma_5 d\,. \tag{22.2.33}$$

純粋な量子色力学ではこの対称性はアノマリーを持たない. なぜなら u と d が色ゲージ群の同じ表現に属し, (22.2.33) の対称性のアノマリーへのグルーオン・グルーオン項へのそれらの寄与は相殺するからだ. 一方, 電磁場 $A^\mu(x)$ が存在すれば, この対称性はアノマリー,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu}(x)\,F^{\rho\sigma}(x)\,\mathrm{tr}\,\left\{q^2\,\tau_3\right\}$$

を持つ. ここで q はクォークの電荷行列, τ_3 は u について $+1$, d について -1 の対称 2×2 行列だ. もし, 通常のように N_c 個の電荷 $2e/3$

を持つ u クォークと同じ個数の電荷 $-e/3$ を持つ d クォークがあるとすれば, トレースは,

$$\mathrm{tr}\,\left\{q^2\,\tau_3\right\} = N_c\left(\frac{2e}{3}\right)^2(+1)\;+\;N_c\left(\frac{-e}{3}\right)^2(-1) = \frac{N_c e^2}{3}$$

となる. したがって, アノマリー関数は,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu}(x)\,F^{\rho\sigma}(x) \tag{22.2.34}$$

だ. そのため有効ラグランジアンにはカイラル変換 (22.2.33) のもとで (22.2.12) を与えるような項を含まなければならない. それは以下で与えられる.

$$\delta\mathcal{L}_{\rm eff}(x) = \alpha\mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu}(x)\,F^{\rho\sigma}(x)\alpha\,. \tag{22.2.35}$$

変換 (22.2.33) のもとではパイ中間子場は,

$$\delta\pi^0 = \alpha F_\pi \tag{22.2.36}$$

と変換する. ここで, $F_\pi = 184$ MeV は19章で導入したパイ中間子崩壊確率だ. (この定数の規格化は, 対称性の生成子の $\gamma_5\tau_3 = 2\gamma_5 t_3$ という定義から決まる.) これにより, 有効ラグランジアンは以下の項を含まなければならない.

$$\frac{\pi^0(x)\mathcal{A}(x)}{F_\pi} = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu}(x)\,F^{\rho\sigma}(x)\,\pi^0(x)\,. \tag{22.2.37}$$

これを $\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の有効ラグランジアンの一般的な表式 (22.1.1) と比較すると, (22.1.1) の定数 g は,

$$g = \frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi} \tag{22.2.38}$$

という値をとらなければならない[5] ことがわかる. (これにより, 我々の以前の粗雑な桁数だけの評価 (22.1.3) はちょうど $6/N_c$ の因子だけ

大きかったことがわかる.) こうして, (22.1.2) のパイ中間子崩壊率は,

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{N_c^2 \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1.11 \times 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1} \qquad (22.2.39)$$

と予言される. 観測された値は $\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = (1.19 \pm 0.08) \times 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$ であり, これは $N_c = 3$ のときに限って理論値 (22.2.39) とよく一致する. この計算の成功はクォークに3つの色があるという証拠のもっとも初期のものの一つだ.

驚くべきことに, 前の節で見たように, π^0 の発見のすぐ後にスタインバーガーは陽子の1ループ・ダイアグラムから g を計算し, G を擬スカラーのパイ中間子・核子結合定数として, $g = e^2 G/32\pi^2 m_N$ という結果を得た. この結果は, コールドバーガー・トライマン関係式を $g_A = 1$ とともに用いて $G = 2m_N/F_\pi$ とすると $N_c = 3$ について (22.2.38) と正確に一致する. 正しい結果はスタインバーガーの結果より因子 $g_A^2 = 1.56$ だけ大きい. スタインバーガーがほぼ正しい結果を得た理由は, この結果は $\mathrm{tr}\{q^2 \tau_3\}$ に比例する三角アノマリーから決定されるということだ. 陽子一つについては, このトレースは e^2 という値だ. これは3色のクォークについて上で得られた値と同じだ.

* * *

前に述べたように, アノマリーのより厳密な導出はユークリッド時空での経路積分を使って得られる. (ユークリッド経路積分は23章の補遺Aで簡潔に論じる.) ユークリッド第4座標を $x_4 = ix^0 = -ix_0$ で導入する. そして, それに対応して, $\partial_4 = -i\partial_0$, $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$, $A_{4\alpha} = iA^0_\alpha$ とする. また時空の体積は $(d^4x)_E$ をユークリッド体積要素 $(d^4x)_E = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ として $d^4x = -i(d^4x)_E$ となる. ユークリッド時空では, 場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ は全く独立として扱わなければならない. それらの局所カイラル変換は $\delta\psi(x) = i\alpha(x) t\gamma_5 \psi(x)$, $\delta\bar{\psi}(x) = -i\alpha(x)\bar{\psi}(x) t\gamma_5$ で定義される. そうすると, 測度の変換はアノマリー関数 $\mathcal{A}(x)$ を

(22.2.11) として, 前と同じく (22.2.10) で与えられる. 前と同様に正則化関数を導入すると, これは $\mathcal{A}(x)$ について (22.12.13) の表式を与える. ユークリッド化した取り扱いの一つの非常に有利な点は, x_4 と $A_{4\alpha}$ が実のために, 表式 (22.2.13) のディラック演算子 $i\not{D}$ がエルミートなことだ.

$$i\not{D} = \Big[i\partial_i + t_\alpha A_{i\alpha}\Big]\gamma_i \,. \tag{22.2.40}$$

ここで i, j 等は 1, 2, 3, 4 について和をとる. したがって, ディラック演算子は正規直交スピノル固有関数 $\varphi_\kappa(x)$ を持つ.

$$i\not{D}\varphi_\kappa = \lambda_\kappa \varphi_\kappa \,, \tag{22.2.41}$$

$$\int (d^4x)_E \; \varphi_\kappa(x)^\dagger \varphi_{\kappa'}(x) = \delta_{\kappa\kappa'} \,. \tag{22.2.42}$$

固有値 λ_κ は実だ. また, この節でずっとそうしているように t は $i\not{D}$ と可換だとしているから, $t\varphi_\kappa = t_\kappa \varphi_\kappa$ を満たすように φ_κ を選ぶことができる. これらの固有関数は完全性条件,

$$\sum_\kappa \varphi_\kappa(x)\varphi_\kappa^\dagger(y) = \delta^4(x-y)1 \tag{22.2.43}$$

を満たす. ここで「1」は 4×4 単位行列だ. したがって, アノマリー関数はいまや明白に収束する和の極限として書くことができる.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= -2\lim\nolimits_{M\to\infty}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\, t\, f(-\not{D}^2/M^2)\sum_\kappa \varphi_\kappa(x)\varphi_\kappa^\dagger(x)\right\} \\ &= -2\lim\nolimits_{M\to\infty}\sum_\kappa t_\kappa\, f(\lambda_\kappa^2/M^2)\left(\varphi_\kappa^\dagger(x)\gamma_5\varphi_\kappa(x)\right) \,.\end{aligned} \tag{22.2.44}$$

アノマリー関数について (22.2.24) の表式を導いたのと全く同じように,

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon^E_{ijkl}\,F_{ij\,\alpha}\,F_{kl\,\beta}\;\mathrm{tr}\,\{t_\alpha t_\beta t\} \tag{22.2.45}$$

を示すことができる. ここで ϵ^E_{ijkl} は $\epsilon^E_{1234} = +1$ の完全反対称テンソルだ. (表式 (22.2.24) と (22.2.45) の間の符号の違いは, (22.2.45) は

(22.2.24) に比べて i の因子が二つ足らないことによる．そのうち, i の因子の一つは,

$$\mathrm{tr}_D\{\gamma_5[\gamma_i,\gamma_j][\gamma_k,\gamma_l]\} = 16\,\epsilon^E_{ijkl}$$

により (22.2.23) から来る．また, もう一つの i の因子は (22.2.20) において d^4k を $(d^4k)_E$ で置きかえることによる.)

さて, 固有値が $\lambda_\kappa \neq 0$ である $i\not{D}$ と t の任意の固有関数 $\varphi_\kappa(x)$ が与えられたとき, $\varphi_{\kappa^-}(x) = \gamma_5\varphi_\kappa(x)$ で与えられる別の規格化された固有関数 $\varphi_{\kappa^-}(x)$ があって, 固有値は $\lambda_{\kappa^-} = -\lambda_\kappa$ と t_κ だ. (本書でずっと使っている記法では γ_5 は $\gamma_5 = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ のエルミート行列であることを思い出そう.) さらに $\left(\varphi^\dagger_\kappa(x)\varphi_\kappa(x)\right) = \left(\varphi^\dagger_{\kappa^-}(x)\varphi_{\kappa^-}(x)\right)$ だから, (22.2.44) の和において κ と κ^- の項は相殺する．これにより $\lambda_\kappa = 0$ の固有関数についての和のみが残る．これらは一般には対になっていない．むしろ, γ_5 は $i\not{D}$ と反可換だから, $i\not{D}$ の固有値がゼロで同時にそれぞれ γ_5 の固有値 $+1$ と -1 を持つ同時正規直交固有関数 φ_u と φ_v に選ぶことができる.

$$\begin{aligned} i\not{D}\varphi_u &= 0\,, \qquad & \gamma_5\varphi_u &= \varphi_u\,, \\ i\not{D}\varphi_v &= 0\,, \qquad & \gamma_5\varphi_v &= -\varphi_v\,. \end{aligned} \tag{22.2.46}$$

$f(0) = 1$ という事実を使うと (2.2.44) は,

$$\mathcal{A}(x) = -2\left[\sum_u t_u\Big(\varphi^\dagger_u(x)\varphi_u(x)\Big) - \sum_v t_v\Big(\varphi^\dagger_v(x)\varphi_v(x)\Big)\right] \tag{22.2.47}$$

となる．さて, φ_u と φ_v は (22.2.42) のように規格化されているから, (22.2.47) の積分は以下を与える.

$$\int (d^4x)_E\mathcal{A}(x) = -2\Big[\sum_u t_u - \sum_v t_v\Big]\,. \tag{22.2.48}$$

ここで u と v についての和はそれぞれ, 演算子 $i\not{D}$ の左手と右手成分のゼロ・モードについてとる. 特に, t が単位行列の場合は, (22.2.45) を使って, これをゲージ場の汎関数と, ディラック演算子のカイラリティが決まったゼロ・モードの数との関係式として表すことができる.

$$-\frac{1}{32\pi^2}\int (d^4x)_E\, \epsilon^E_{ijkl}\, F_{\alpha ij}\, F_{\beta kl}\, \mathrm{tr}\Big[t_\alpha t_\beta\Big] = n_+ - n_- \,. \qquad (22.2.49)$$

ここで $n_\pm$ は $\not{D}$ のゼロ・モードで γ_5 の固有値 ± 1 を持つものの数だ. これが有名な**アティヤー・シンガー指標定理** (Atiyah–Singer index theorem) だ.[6a] それは色々なことを意味しているが, その中でも特に, ゲージ場の変化のもとで (22.2.49) の左辺の積分が滑らかに変化することができないことを示している. 特に, 変化分は整数に限られているので, この積分はゲージ場のトポロジーにのみ依存できる. このトポロジー依存性は23.5節で論じる.

22.3 一般的な場合のアノマリーの直接計算

22.2 節で藤川のエレガントな方法を用いて, 量子色力学のようなゲージ理論でカイラル対称性のアノマリーを如何に計算するかを見た. このような理論ではゲージ相互作用が非カイラル的でフェルミオン数が保存する. この方法はもっと一般的な問題を扱うためにも使うことができるが, それはあまり一本道とは言えない.[7] この節では元来の取り扱いにしたがって, アノマリーを直接計算で扱う. これはアノマリーについて異なる視点を与えるという意味で有用だ. また同時に, 一般の理論でのアノマリーについてもあまり余分な手間なしに議論できるという利点もある.

一般の場合を扱うには, 全ての左手フェルミオン場を (区別が意味ある場合には, 反フェルミオン場も) 一つの列ベクトル χ に統一して記す. たとえば, もし ψ が全てのクォークとレプトンを含む (反クォーク

と反レプトンは含まない) 列ベクトルとすると,

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \\ \frac{1}{2}\left[\mathcal{C}\left(1-\gamma_5\right)\psi\right]^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \\ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\mathcal{C}\psi^* \end{bmatrix} \tag{22.3.1}$$

となる. ここで, $\mathcal{C}$ は5.4節で,

$$\mathcal{C}\gamma_\mu^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} = \gamma_\mu$$

と定義された行列だ. これは χ の全ての成分がローレンツ群の同じ (1/2, 0) 表現に属するために必要だ. フェルミオン数 (バリオン数か, バリオン数引くレプトン数) を保存する微小ゲージ変換,

$$\delta\psi = i\theta_\alpha\left[\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)t_\alpha^L + \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)t_\alpha^R\right]\psi \tag{22.3.2}$$

のもとで, この列ベクトルは変換,

$$\delta\chi = i\epsilon_\alpha T_\alpha \chi \tag{22.3.3}$$

を受ける. ここで,

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -t_\alpha^{R*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -(t_\alpha^R)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{22.3.4}$$

だ. ここではフェルミオン数を保存する理論に話を限らない. そのため, T_α はゲージ代数の任意のエルミート表現であり, 必ずしも (22.3.4) のブロック対角形をしていない. まず質量ゼロのフェルミオンのみを考察し, 後でフェルミオンの質量の影響を論じる.

ここで問題となるのは1ループ3点関数,

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x,y,z) \equiv \langle T\{j_\alpha^\mu(x),\, j_\beta^\nu(y),\, j_\gamma^\rho(z)\}\rangle_{\mathrm{VAC}} \tag{22.3.5}$$

だ. ここで j_α^μ はフェルミオン的カレントで自由場,

$$j_\alpha^\mu = -i\bar{\chi}T_\alpha\gamma^\mu\chi \tag{22.3.6}$$

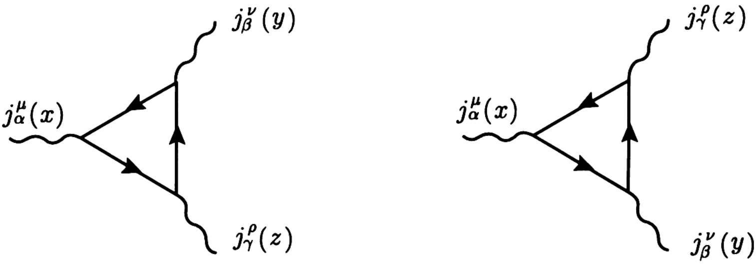


図 22.1: カレント $j^\mu_\alpha(x)$ の二つの三角アノマリー・ダイアグラム. 実線はフェルミオンで, 波線はカレントに結合する仮のゲージ場を意味する.

を使って計算される. 22.1図の二つのファインマン・ダイアグラムは, 以下を与える.

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) =$$
$$-i\mathrm{Tr}\left[S(x-y)T_\beta\gamma^\nu P_L S(y-z)T_\gamma\gamma^\rho P_L S(z-x)T_\alpha\gamma^\mu P_L\right]$$
$$-i\mathrm{Tr}\left[S(x-z)T_\gamma\gamma^\rho P_L S(z-y)T_\beta\gamma^\nu P_L S(y-x)T_\alpha\gamma^\mu P_L\right] \; . \tag{22.3.7}$$

ここで, P_L は左手フェルミオン場への射影演算子,

$$P_L = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{22.3.8}$$

だ. また, $S(x)$ は質量ゼロのフェルミオン場のプロパゲーター,

$$S(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p \left(\frac{-i\not{p}}{p^2-i\epsilon}\right) e^{ip\cdot x} \tag{22.3.9}$$

だ. (このファインマン則の使い方についてさらに詳しい議論は, この節の最後を見よ.) 因子を集めると, (22.3.7) は以下となる.

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = \frac{i}{(2\pi)^{12}}\int d^4k_1\, d^4k_2\, e^{-i(k_1+k_2)\cdot x}\, e^{ik_1\cdot y}\, e^{ik_2\cdot z}\int d^4p$$
$$\times\left\{\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}-\not{k}_1+\not{a}}{(p-k_1+a)^2-i\epsilon}\gamma^\nu\frac{\not{p}+\not{a}}{(p+a)^2-i\epsilon}\gamma^\rho\frac{\not{p}+\not{k}_2+\not{a}}{(p+k_2+a)^2-i\epsilon}\right.\right.$$

$$
\times\ \gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\Bigg] \operatorname{tr}\,[T_\beta T_\gamma T_\alpha]
$$

$$
+\operatorname{tr}\left[\frac{\not p-\not k_2+\not b}{(p-k_2+b)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{\not p+\not b}{(p+b)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{\not p+\not k_1+\not b}{(p+k_1+b)^2-i\epsilon}\gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\right]
$$

$$
\times \operatorname{tr}\,[T_\gamma T_\beta T_\alpha]\Bigg\}\,. \tag{22.3.10}
$$

ここで「tr」はその引数によって決まるディラックか群の指標についてのトレースを意味する．また，任意の定数4元ベクトル a と b を導入した．これは，(22.3.10) は収束し，したがって内線が持つ運動量の添字には依存しないが，$\partial_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}$ を計算するにはこの添字に依存する発散積分についての操作が必要だからだ．a^μ と b^μ を選ぶ自由度はこれらの積分のアノマリーを一つのカレントから他へ動かす自由度だが，これによってアノマリーを全部消すことはできないことを以下に見る．

(22.3.10) の発散をとる際には以下の恒等式を使う．

$$
\not k_1+\not k_2=(\not p+\not k_2+\not a)-(\not p-\not k_1+\not a)=(\not p+\not k_1+\not b)-(\not p-\not k_2+\not b)\,.
$$

そして，以下を得る．

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{12}}\int d^4k_1\,d^4k_2\,e^{-i(k_1+k_2)\cdot x}\,e^{ik_1\cdot y}\,e^{ik_2\cdot z}\int d^4p
$$

$$
\times\Bigg\{\operatorname{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha]\ \operatorname{tr}\left[\frac{\not p-\not k_1+\not a}{(p-k_1+a)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{\not p+\not a}{(p+a)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{1+\gamma_5}{2}\right]
$$

$$
-\operatorname{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha]\ \operatorname{tr}\left[\frac{\not p+\not a}{(p+a)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{\not p+\not k_2+\not a}{(p+k_2+a)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2}\right]
$$

$$
+\operatorname{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha]\ \operatorname{tr}\left[\frac{\not p-\not k_2+\not b}{(p-k_2+b)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{\not p+\not b}{(p+b)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2}\right]
$$

$$
-\operatorname{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha]\ \operatorname{tr}\left[\frac{\not p+\not b}{(p+b)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{\not p+\not k_1+\not b}{(p+k_1+b)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{1+\gamma_5}{2}\right]\Bigg\}\,.
\tag{22.3.11}
$$

この時点で, 3点関数を群の指標について対称な部分と反対称な部分に分けると便利だ. これは,

$$\mathrm{tr}\,[T_\beta\,T_\gamma\,T_\alpha] = D_{\alpha\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}iN\,C_{\alpha\beta\gamma}$$

と,

$$\mathrm{tr}\,[T_\gamma\,T_\beta\,T_\alpha] = D_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}iN\,C_{\alpha\beta\gamma}$$

を使う. ここで $D_{\alpha\beta\gamma}$ は完全対称な量,

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\{T_\alpha,\,T_\beta\}\,T_\gamma] \tag{22.3.12}$$

だ. また, 構造関数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ の係数は,

$$\mathrm{tr}[T_\alpha T_\beta] = N\,\delta_{\alpha\beta}$$

で定義される.

群の指標に関して反対称な項は一般にゼロではない. しかし, これはなんら対称性の破れを表すものではない. 10.4節でのワード恒等式の導出のように, 行列要素 (22.3.5) の発散を形式的に計算する際には時間順序積の θ 関数の時間微分から以下の寄与を受ける.

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\right]_{\mathrm{formal}} &= -iC_{\alpha\beta\delta}\delta^4(x-y)\langle j^\nu_\delta(y)\,j^\rho_\gamma(z)\rangle_{\mathrm{VAC}} \\ &\quad -iC_{\alpha\gamma\delta}\delta^4(x-z)\langle j^\nu_\beta(y)j^\rho_\delta(z)\rangle_{\mathrm{VAC}}\,.\end{aligned} \tag{22.3.13}$$

(22.3.11) の反対称項が (22.3.13) を再現することは簡単にわかる. アノマリーは (22.3.11) の対称部分に含まれている.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\right]_{\mathrm{anom}} = \frac{1}{(2\pi)^{12}}D_{\alpha\beta\gamma}$$
$$\times\int d^4k_1\; d^4k_2\; e^{-i(k_1+k_2)\cdot x}\; e^{ik_1\cdot y}\; e^{ik_2\cdot z}$$

$$
\begin{aligned}
\times \int d^4p \Bigg\{ &\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}-\not{k}_1+\not{a}}{(p-k_1+a)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{\not{p}+\not{a}}{(p+a)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{1+\gamma_5}{2}\right] \\
&-\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}+\not{a}}{(p+a)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{\not{p}+\not{k}_2+\not{a}}{(p+k_2+a)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2}\right] \\
&+\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}-\not{k}_2+\not{b}}{(p-k_2+b)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{\not{p}+\not{b}}{(p+b)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2}\right] \\
&-\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}+\not{b}}{(p+b)^2-i\epsilon}\gamma^\nu \frac{\not{p}+\not{k}_1+\not{b}}{(p+k_1+b)^2-i\epsilon}\gamma^\rho \frac{1+\gamma_5}{2}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{22.3.14}
$$

最初と4番目のトレースをまとめ, 3番目と2番目のトレースをまとめると, これは以下の形に書ける.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\right]_{\text{anom}} &= \frac{1}{(2\pi)^{12}}D_{\alpha\beta\gamma} \\
\times \int d^4k_1\, d^4k_2\, &e^{-i(k_1+k_2)\cdot x}\, e^{ik_1\cdot y}\, e^{ik_2\cdot z} \\
\times \Bigg\{ &\mathrm{tr}\left[\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\frac{1+\gamma_5}{2}\right] I_{\kappa\lambda}(a-b-k_1, b, b+k_1) \\
&+\mathrm{tr}\left[\gamma^\kappa\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\nu\frac{1+\gamma_5}{2}\right] I_{\kappa\lambda}(b-a-k_2, a, a+k_2)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{22.3.15}
$$

ここで,

$$I_{\kappa,\lambda}(k,c,d) \equiv \int d^4p\Big[f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d) - f_{\kappa\lambda}(p,c,d)\Big], \tag{22.3.16}$$

$$f_{\kappa\lambda}(p,c,d) \equiv \frac{(p+c)_\kappa(p+d)_\lambda}{[(p+c)^2-i\epsilon][(p+d)^2-i\epsilon]} \tag{22.3.17}$$

だ. これらの積分を計算するには, 関数 $f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d)$ の k についての冪展開を考える.

$$f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k^{\mu_1}\cdots k^{\mu_n}\frac{\partial^n f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^{\mu_1}\cdots\partial p^{\mu_n}}.$$

$f_{\kappa\lambda}(p,c,d)$ のゼロ次の項は明らかに (22.3.16) でゼロとなる. (22.3.16) の他の項は全て p に関する微分の積分だから, ウィック回転の後には大きな3次元球の表面積分と書くことができる. その球の半径をいま仮に P としよう. そうすると, f の n 回微分は $P^{-2-(n-1)}$ と振舞う関数の表面積分だ. また, 半径 P の3次元球の表面積は P^3 と振舞うから, $P\to\infty$ において寄与できるのは $n=1$ か $n=2$ の項のみだ.

$$I_{\kappa\lambda}(k,c,d) = k^\mu \int d^4p \frac{\partial f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^\mu} + \tfrac{1}{2}k^\mu k^\nu \int d^4p\, \frac{\partial^2 f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^\mu \partial p^\nu}\,. \tag{22.3.18}$$

直接計算で以下を得る.

$$I_{\kappa\lambda}(k,c,d) = \tfrac{1}{6}i\pi^2 \times\Big[2k_\lambda c_\kappa + 2k_\kappa d_\lambda - k_\lambda d_\kappa - k_\kappa c_\lambda - \eta_{\kappa\lambda}\, k\cdot(k+c+d)\Big]\,. \tag{22.3.19}$$

さて, (22.3.15) において射影行列 $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ の 1 と γ_5 のトレースの項を別個に考察しなければならない. 1 から発生する項は, $\mathrm{tr}[\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho]$ を含む. これは κ と λ についてと, ν と ρ について対称だ. したがって, 積分は以下の組み合わせで現れる.

$$\begin{aligned}&I_{\kappa\lambda}(a-b-k_1,b,b+k_1) + I_{\lambda\kappa}(a-b-k_1,b,b+k_1)\\&+I_{\kappa\lambda}(b-a-k_2,a,a+k_2) + I_{\lambda\kappa}(b-a-k_2,a,a+k_2)\,.\end{aligned}$$

(22.3.19) を使うと, これが消えるのは任意の定数ベクトルを,

$$a=-b \tag{22.3.20}$$

と選んだときのみであることがわかる. さらに, このように選ぶと3つ全部のカレントについて非カイラル的なアノマリーを避けることが出来る. これは $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ において a と b が $a'=k_2+a$

と $b' = -k_2 + b$ に置きかえられ, $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ ではa と b が $a'' = k_1 + a$ と $b'' = -k_1 + b$ で置きかえられるために, $a = -b$ とすると $a' = -b'$ も $a'' = -b''$ も保証されるからだ.

γ_5 を含むトレースの項が残った. これは完全反対称だ.

$$\mathrm{tr}\left[\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma_5\right] = -4i\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} . \tag{22.3.21}$$

ここで $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ は $\epsilon^{0123} = 1$ の完全反対称テンソルだ. これと $b = -a$ を (22.3.15) に使うと以下を得る.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\right]_{\mathrm{anom}} = \frac{2}{(2\pi)^{12}}D_{\alpha\beta\gamma}\int d^4k_1\; d^4k_2\; e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} \times e^{ik_1\cdot y}\, e^{ik_2\cdot z}\;\pi^2\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}a_\kappa\;(k_1+k_2)_\lambda . \tag{22.3.22}$$

$J^\mu_\alpha(x)$ のカレントでは $a \propto k_1 + k_2$ としてアノマリー (22.3.22) を消去できる. これは可能ではあるが, アノマリーが全部消えるわけではない. アノマリーは $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ か $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ に現れる. この問題の対称性から, アノマリーは$(k_2+a)-(-k_2+b) \propto k_1$ のとき, つまり書きかえると $a+k_2 \propto k_1$ のときにのみ $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ に現れないことがわかる. またアノマリーは $(-k_1+a)-(k_1+b) \propto k_2$, つまり $a - k_1 \propto k_2$ のときにのみ, $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ に現れない. a^μ をこれらの条件のどれか二つを満たすように選び, アノマリーがカレントのどれか二つから取り除かれるようにすることができる. しかし k_1 と k_2 が平行でなければ, 三つの条件 $a \propto k_1 + k_2$, $a + k_2 \propto k_1$, $a - k_1 \propto k_2$ を同時に満たすことは不可能だ. (たとえば, 最初の二つの条件は $a = -k_1 - k_2$ を意味するが, これは3番目の条件に反する.) したがって, どのカレントがアノマリーを持つかを決める自由度はある程度存在するものの, $D_{\alpha\beta\gamma}$ がゼロでなければカレント $J^\mu_\alpha(x)$, $J^\nu_\beta(y)$, $J^\rho_\gamma(z)$ のどれか最低一つはアノマリーを持つ. これが上の計算の主要

な結果の一つだ. 次の節ではこれがゲージ理論の物質場の内容に対する拘束条件として使われる.

アノマリーの計算はベクトルをずらせる a^μ の選び方によることを見た. 残念なことに, 完全に満足の行く選び方は存在しない. そこで, a^μ は各々の問題に固有の性質に合うように選ぶ.

非常に重要な問題として, $J^\mu_\alpha(x)$ が大域的対称性のカレントであり, $J^\nu_\beta(y)$ と $J^\rho_\gamma(z)$ がゲージ対称性のカレント, つまりゲージ場が結合するカレントである場合がある. (そのような問題は前節で扱った.) このような場合は a^μ を $J^\nu_\beta(y)$ や $J^\rho_\gamma(z)$ ではなく $J^\mu_\alpha(x)$ のみにアノマリーが生じるように選ばなければならない. すでに見たように, このためには $a+k_2 \propto k_1$ と $a-k_1 \propto k_2$ が満たされなければならず,

$$a = k_1 - k_2 \tag{22.3.23}$$

という唯一の結果が得られる. この a^μ の値を採用して, アノマリー (22.3.22) は,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\right]_{\text{anom}} \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma}\int d^4k_1\, d^4k_2\, e^{-i(k_1+k_2)\cdot x}\, e^{ik_1\cdot y}\, e^{ik_2\cdot z} \\
&\qquad \times 4\pi^2 \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda} \\
&\quad = -\frac{1}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\frac{\partial\delta^4(y-x)}{\partial y^\kappa}\frac{\partial\delta^4(z-x)}{\partial z^\lambda}
\end{aligned} \tag{22.3.24}$$

となる.

ここで, このような結果は質量ゼロの粒子を含む理論でのみ得られることに注意しておく.[7a] もしそうでなければ, $\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ のフーリエ変換がゼロ運動量の周りで冪展開できるだろう. そのような展開で (22.3.24) の形のカレントの発散をもたらすことのできる項は, 運動量について1次の擬テンソルだけだ.

$$\left[\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(k_1,k_2)\right]_{\text{anom}} \equiv \int d^4y\, d^4z\, e^{-ik_1\cdot y} e^{-ik_2\cdot z}\, \left[\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(0,y,z)\right]_{\text{anom}}$$

$$= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[A_{\alpha\beta\gamma}k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma}k_{2\sigma}\Big] \,.$$

ここで $A_{\alpha\beta\gamma}$ と $B_{\alpha\beta\gamma}$ は定数だ. (22.3.24) によれば,

$$(k_1 + k_2)_\mu \left[\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2)\right]_{\rm anom} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}k_{1\kappa}k_{2\lambda}$$

だから,

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}$$

となる. しかし, 振幅の三つのカレントについての対称性から,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma}k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma}k_{2\sigma} &= -A_{\alpha\gamma\beta}k_{2\sigma} - B_{\alpha\gamma\beta}k_{1\sigma} \\ &= -A_{\gamma\alpha\beta}(-k_{1\sigma} - k_{2\sigma}) - B_{\gamma\alpha\beta}k_{2\sigma} \end{aligned}$$

が言える. したがって, $k_{1\sigma}$ と $k_{2\sigma}$ の係数を等しく置いて,

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -B_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} \,, \qquad B_{\alpha\beta\gamma} = -A_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} - B_{\gamma\alpha\beta}$$

となる. これらの表式の差をとって以下を得る.

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta} - B_{\alpha\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha\beta} \,.$$

これは $D_{\alpha\beta\gamma}$ に比例するから完全対称でなければならず, $B_{\alpha\beta\gamma}$ は, したがって $A_{\alpha\beta\gamma}$ も完全対称だ. しかし, 3点関数の対称性の条件は $A = -B = B - A$ だから, $A_{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma} = 0$ となり, これは (22.3.24) に矛盾する. 同じ理由により, 局所的な項を相互作用に付け加えて, その J^μ_α の発散への寄与が (22.3.24) で与えられるものを打ち消すようにしても, アノマリーを打ち消すことはできない.

(22.3.24) に戻って, この結果をカレント J^ν_β と J^ρ_γ に結合するゲージ場があるときのカレント J^μ_α の真空期待値を使って表す. 三角ダイアグラムはゲージ場が存在するとき, カレントに以下の寄与をする.

$$\langle J^\mu_\alpha(x)\rangle_\triangle = -\tfrac{1}{2}\int d^4y\, d^4z\, \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\, A^\beta_\nu(y)\, A^\gamma_\rho(z) \,. \qquad (22.3.25)$$

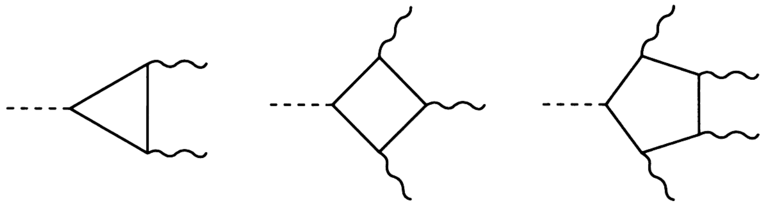


図 22.2: 破線で示されたカレントのアノマリーを生じる1ループのダイアグラム. 実線はフェルミオン, 波線はフェルミオンが相互作用をするゲージ場.

(22.3.24) を使うと, これはアノマリーな発散,

$$[\langle \partial_\mu J^\mu_\alpha(x)\rangle_\triangle]_{\rm anom} = -\frac{1}{8\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\, \partial_\kappa A^\beta_\nu(x)\, \partial_\lambda A^\gamma_\rho(x) \qquad (22.3.26)$$

を持つことがわかる. 他に22.2図に示したダイアグラムもアノマリーを生じる. ゲージ不変性から, 22.2図のダイアグラムの和は以下のゲージ不変な結果にならなければならない.

$$[\langle \partial_\mu J^\mu_\alpha(x)\rangle]_{\rm anom} = -\frac{1}{32\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\, F^\beta_{\kappa\nu}(x)\, F^\gamma_{\lambda\rho}(x)\ . \qquad (22.3.27)$$

確認のためにフェルミオン数を保存する理論を考え, その生成子 T_α が (22.3.4) の形だとする. アノマリー (22.3.26) の定数 $D_{\alpha\beta\gamma}$ は以下で与えられる.

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}{\rm tr}[\{t^L_\alpha, t^L_\beta\}t^L_\gamma] - \tfrac{1}{2}{\rm tr}[\{t^R_\alpha, t^R_\beta\}t^R_\gamma]\ . \qquad (22.3.28)$$

特に, 22.2節でゲージ場の $t^L_\beta = t^R_\beta \equiv t_\beta$ として, また t_γ についても同様にとったベクトルカレント J^ν_β と J^ρ_γ (22.2節では J^ν_α と J^ρ_β と呼んだ) との相互作用による $t^L = -t^R \equiv t$ の軸性ベクトルカレント J^μ_5 の発散を計算した. したがって, この場合には $D_{\alpha\beta\gamma}$ は ${\rm tr}[\{t, t_\beta\}t_\gamma] = {\rm tr}[\{t_\beta, t_\gamma\}t]$ で置きかえられ, (22.3.27) は,

$$[\langle \partial_\mu J^\mu_5(x)\rangle]_{\rm anom} = -\frac{1}{32\pi^2} {\rm tr}[\{t_\beta, t_\gamma\}t]\, \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\, F^\beta_{\kappa\nu}(x)\, F^\gamma_{\lambda\rho}(x) \qquad (22.3.29)$$

となり, (22.2.26) と一致する.

どんなゲージ場も $J^\mu_\alpha(x)$, $J^\nu_\beta(y)$, $J^\rho_\gamma(z)$ のどれかのカレントと結合していない場合には, ずらすベクトル a^μ の選び方は便宜的なものに過ぎない. もし, 全部ではなく幾つかのカレントが自発的に破れない対称性に伴っていれば, 破れていない対称性に対応したカレントにアノマリーが無いように a^μ を 選んで, 破れていない対称性を自明に保つ. (これは22.7節で重要となる.) たとえば, 量子色力学やそれと同様の理論では, カイラル $SU(3) \times SU(3)$ のような大域的対称性の生成子 T_α が (22.3.4) の形となり, 全てのカレントは破れていない対称性に相当する $t^R_\alpha = t^L_\alpha$ のベクトルか, 破れている対称性に相当する $t^R_\alpha = -t^L_\alpha$ の軸性ベクトルかだ. (22.3.28) からこの場合にはアノマリーを生成する三角ダイアグラムは軸性ベクトルを一つとベクトルを二つ持つものか, 三つの軸性ベクトル・カレントを持つものだとわかる. 軸性ベクトル一つとベクトル二つの場合には, アノマリーがベクトル・カレントの保存則を妨げないように a^μ を選ぶ. つまり, もし $J^\mu_\alpha(x)$ が軸性カレントで $J^\nu_\beta(y)$ と $J^\rho_\gamma(z)$ が二つのベクトル・カレントならば, (22.3.23) と同じように $a^\mu = k^\mu_1 - k^\mu_2$ ととり, アノマリーが (22.3.24) で与えられるようにする. 一方, 三つの軸性ベクトル・カレントの場合にはそのどれもアノマリーを持たないと要求する理由は無い. そのため, 三つのカレントに対称的になるように a^μ を与えるのが自然だ. ローレンツ不変性から, α と β を定数として $a = \alpha k_1 + \beta k_2$ を試してみることにする. このとき, 対称性から, それぞれの内線の運動量はp とその線の終点から流出する運動量に α をかけたものと, その線の始点から流出する運動量に β をかけたものとの和に等しくなければならない. つまり, $a = \alpha k_1 + \beta k_2$ を要請すると, 対称性から $a - k_1 = -\alpha(k_1 + k_2) + \beta k_1$ と $a + k_2 = \alpha k_2 - \beta(k_1 + k_2)$ とならなければならない. これらの三つの関係は, $\alpha = -\beta = 1/3$ のときにのみ

平行でない k_1 と k_2 によって満たされている. したがって,

$$a = \tfrac{1}{3}(k_1 - k_2) \tag{22.3.30}$$

となる. これを (22.3.22) に使い (22.3.23) と比較すると, 三つの軸性ベクトル・カレントのファインマン振幅における軸性ベクトル・カレントのアノマリーは一つの軸性ベクトル・カレントと二つのベクトル・カレントのものの3分の1だということがわかる.

カレントの発散には, さらに22.2図のダイアグラムからのアノマリーも含まれる. 三角ダイアグラムさえ保存カレントを与えないので, ここではゲージ不変性は何の指針にもならない. 強い相互作用の $SU(3) \times SU(3)$ カイラル対称性の全アノマリーは, ベクトル・カレントが保存され, 軸性カレントがそれらのカレントについて対称なように運動量をずらすベクトルを選んで, バーディーン (Bardeen)[8] によって計算された. 量子色力学では, この $SU(3) \times SU(3)$ (これはクォークの色ではなくフレーバーに働く) はゲージ化されていないが, このアノマリーをベクトル場 $V_a^\mu(x)$ の8重項と軸性ベクトル場 $A_a^\mu(x)$ の8重項に弱く結合する仮想的なゲージ場の汎関数 $\Gamma[V, A]$ におけるゲージ不変性の破れとして表すと便利だ. また, 微小ゲージ変換演算子,*

$$i\mathcal{Y}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta V_{a\mu}(x)} - f_{abc}V_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} - f_{abc}A_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} \tag{22.3.31}$$

と,

$$i\mathcal{X}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta A_{a\mu}(x)} - f_{abc}V_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} - f_{abc}A_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} \tag{22.3.32}$$

---

*ここで演算子 $\mathcal{Y}_a$ と $\mathcal{X}_a$ は文献8で X_a と Y_a と呼ばれたものだ. この記法の変化は19章の記法との合致を計るためだ. そこでは一貫して破れた対称性の生成子は X_a と記した.

を導入する. ここで, f_{abc} は $SU(3)$ の構造定数だ. 上に述べたように, 内線の運動量の添字はベクトル・カレントがアノマリーを持たないように選ばれている.

$$\mathcal{Y}_a\,\Gamma[V,A]=0\,. \tag{22.3.33}$$

しかし, そうすると軸性ベクトル・カレントにアノマリーが現れる.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_a\,\Gamma[V,A]=\frac{i}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\Big\{\lambda_a\Big[&V_{\mu\nu}V_{\rho\sigma}+\tfrac{1}{3}\,A_{\mu\nu}A_{\rho\sigma}-\tfrac{32}{3}A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma\\&+\tfrac{8}{3}i(A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma}+A_\mu V_{\rho\sigma}A_\nu+V_{\rho\sigma}A_\mu A_\nu)\Big]\Big\}\,.\end{aligned} \tag{22.3.34}$$

ここで, λ_a は (19.7.2) で与えられる $SU(3)$ 行列で,

$$V_\mu\equiv\tfrac{1}{2}\lambda_a V_{\mu a}\,,\qquad A_\mu\equiv\tfrac{1}{2}\lambda_a A_{\mu a}\,, \tag{22.3.35}$$

$$V_{\mu\nu}=\partial_\mu V_\nu-\partial_\nu V_\mu-i[V_\mu,V_\nu]-i[A_\mu,A_\nu]\,, \tag{22.3.36}$$

$$A_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-i[V_\mu,A_\nu]-i[A_\mu,V_\nu] \tag{22.3.37}$$

だ. すでに説明したように (22.3.34) の右辺第2項に伴う因子 1/3 は AVV と AAA のダイアグラムでの a^μ の選び方が異なることによる. 22.6節では (22.3.34) の3次と4次の項が2次の項から計算されるための無矛盾条件を述べる.

対称性が全て自発的に破れる場合のアノマリーについては, 異なるカレントを区別するように a^μ を選ぶ理由は全く無く, その代りに, フェルミオンの内線について, それに付いたゲージ・ボゾンについて対称なように添字を付けるのが自然だ. すでに見たように, これは $a=\frac{1}{3}(k_1-k_2)$ と選んで三角ダイアグラムを計算することを意味する. これにより, (22.3.26) で与えられるものの3分の1が三角アノマ

リーに与えられる. 四角形と五角形のダイアグラムを含めると, この結果は,[8a]

$$[\langle D_\mu J^\mu_\alpha\rangle]_{\rm anom} = -\frac{1}{24\pi^2}\,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\,{\rm Tr}\Big\{T_\alpha\Big[\partial_\kappa A_\nu\,\partial_\lambda A_\rho - \tfrac{1}{2}i\partial_\kappa A_\nu\,A_\lambda A_\rho + \tfrac{1}{2}iA_\kappa\,\partial_\nu A_\lambda\,A_\rho - \tfrac{1}{2}iA_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho\Big]\Big\} \qquad (22.3.38)$$

となる. ここで $A^\mu \equiv A^\mu_\alpha T_\alpha$ だ. この結果をここで導くことはしない. そのような場合には A_μ について2次の項は (22.3.26) の対応する項の3分の1になることはすでに見た. また, 22.6節では無矛盾条件を使い2次の項から (22.3.38) の残りの項を導く.

さて, これらの結果に対する可能な補正を考察しなければならない. 摂動論の全次数でのアノマリーはアドラーとバーディーン[9]によって注意深く導出された. 以下では彼らの解析の骨子を述べる.

(22.3.22) を導いた議論は摂動論の任意の次数で使えて, 一般に表面積分として表せる運動量積分からアノマリーが生じることが示せる. その結果, (22.3.18) で見たようにアノマリーに寄与するカレントの発散ダイアグラムはフェルミオン・ループをまわる運動量についての積分の次元が (運動量の冪で) ゼロまたは正のものだとわかる. ループのフェルミオンが仮想的ゲージボゾンと相互作用すると, フェルミオン・ループの運動量積分の次元が下がり, アノマリーへの寄与が無くなることがある. したがって, そのような輻射補正からアノマリーへの寄与はない. (フェルミオン・ループだけでなく仮想的ゲージボゾンの運動量積分が負ではない次元を持つことは可能だ. しかし, フェルミオン・プロパゲーターは問題のカイラル対称性を破らずには正則化できないが, ゲージ・ボゾンのプロパゲーターについてはそれが可能だ.) フェルミオン・ループに付いたゲージ・ボゾンと他のゲージ・ボゾンや他のフェルミオン・ループとの相互作用はアノマリーに影響する. しかし, これは $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\,F^\beta_{\kappa\nu}(x)\,F^\gamma_{\lambda\rho}(x)$ のような演算子をくりこむ効

果しかない. 同じ理由で,問題の対称性を破らないフェルミオンの質量 (それが可能ならば) は, この質量の因子を取り出すと運動量積分の次元が下がるのでアノマリーを変えない.

上の段落の最後に述べたことから, 理論に存在する全てのフェルミオン, つまり, 質量ゼロもしくは軽いフェルミオンだけでなく重いフェルミオンさえも知らなくても, アノマリーが計算できるのではないかという疑問が生じる. その答えは「イエス」だ. 以下に, 与えられた対称性のもとで質量を持つことのできるフェルミオンは, その対称性のアノマリーに寄与することはできないことを示す. ここで考えている一般の種類の理論ではラグランジアン密度の質量項は,

$$\mathcal{L}_{\rm mass} = -\sum_{nn'\sigma\sigma'} \chi_{\sigma n}\epsilon_{\sigma\sigma'}M_{nn'}\chi_{\sigma' n'} + [\text{共役項}] \tag{22.3.39}$$

の形をとる. ここで σ はローレンツ群の $(\frac{1}{2},0)$ 表現の2成分スピノル指標, $\epsilon_{\sigma\sigma'}$ はローレンツ不変性に必要な $\epsilon_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = +1$ の反対称行列. M は対称質量行列だ.** さて, $\mathcal{L}_{\rm mass}$ がゲージ不変性を保つには, 質量行列は,

$$-T_\alpha^{\rm T}\,M = M\,T_\alpha \tag{22.3.40}$$

を満たさなければならない. 指標 n はゲージ群の既約表現自体を表す指標 r とそれぞれの既約表現内の成分を表す指標 s に置きかえることができる. したがって,

$$(T_\alpha)_{rs,r's'} = \delta_{rr'}(T_\alpha^{(r)})_{s,s'} \tag{22.3.41}$$

**フェルミオン数を保存する理論では, χ が (22.3.1) の形をしていて, M は通常の質量行列と,

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & m \\ m^{\rm T} & 0 \end{pmatrix}$$

で関係している. 位相因子を1にとると, パリティ, 荷電共役, 時間反転不変性はそれぞれ, m をエルミート, 対称, 実にする.

と,

$$M_{rs,r's'} = (M^{(rr')})_{ss'} \tag{22.3.42}$$

と書くことができる. すると (22.3.40) は以下となる.

$$-T_\alpha^{(r)\mathrm{T}} M^{(r,r')} = M^{(r,r')} T_\alpha^{(r')} . \tag{22.3.43}$$

(ここでは r や r' について和はとってはいない.) シューアの定理[10]によると既約表現の対の行列がこのような表式で関係していると, それらを関係付ける行列はゼロまたは正則だ. (5.5節を見よ.) したがって, (i) $M^{(r,r')} = 0$ か, もしくは (ii) $-T_\alpha^{(r)\mathrm{T}}$ と $T_\alpha^{(r')}$, また T_β と T_γ は相似変換で関係している. 後者の場合には, 各規約表現 r と r' に属するフェルミオンのアノマリー定数 (22.3.12) への寄与は,

$$D_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} = -D_{\alpha\beta\gamma}^{(r')} \tag{22.3.44}$$

と関係している. したがって, ($r = r'$ のとき) アノマリーはゼロとなるか, もしくは($r \neq r'$ のとき) 二つの表現の間で相殺する. したがって, ある対称性の与えられた集合のアノマリーはそれらの対称性のもとで質量を持つことが許されるフェルミオンがあっても, それに影響されない.

* * *

3点関数 (22.3.7) を計算するためのファインマン則には微妙な点が一つある. ここでそれについて議論する. 通常の (22.3.9) のフェルミオン・プロパゲーターを使うと, 実際はフェルミオン場の数を2倍にしたことになる. (22.3.1) で与えられる純粋に左手成分の場 $\chi(x)$ に加えて, (22.3.9) のプロパゲーターはゲージ場と相互作用しない右手モードも含んでいる. (これはフェルミオン数を保存する理論の $(1-\gamma_5)\psi$ とは関係ない.) これらの相互作用しない右手場を相互作用する左手場と結合し, 一つのスピノル Ψ を作ると, フェルミオンのラグランジ

アン密度は $-\bar{\Psi}\not{D}\Psi$ となる. ここで, $\not{D}$ はいま,

$$\not{D} = \not{\partial} - i \not{A}_\alpha T_\alpha \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{22.3.45}$$

となる. 実際に存在するゲージ場もしくは架空のゲージ場と相互作用するスピン $\frac{1}{2}$ 場の1ループ真空汎関数は単に $\mathrm{Det}\,\not{D}$ だ. この行列式でゲージ不変性が成立しないのは, 演算子 (22.3.45) が,

$$\not{D} = \not{\partial}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) + \not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{22.3.46}$$

と二つの項の和であり, そのうち第2項のみがゲージ不変なせいだ.

アノマリーには別の見方[10a]もあり, これにより, 任意の次元の空間でゲージ対称性だけでなく座標対称性などの広い種類のアノマリーの計算の枠組が提供される. そこでは, よく定義された行列式を持つ演算子 (22.3.45) を扱う代りに, (22.3.46) の第2項のみを扱う.

$$\not{D}_L \equiv \not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) . \tag{22.3.47}$$

これは完全にゲージ不変だが, 行列式はよく定義されない. それは, この演算子が右手か左手のどちらの成分のフェルミオン場の空間もそれ自身に写像せず, 相手の成分のフェルミオン場の空間に写像するからだ. ゲージ変換分を取り除いたゲージ場の空間で $\mathrm{Det}\,\not{D}_L$ の微分方程式を書き下すことによってゲージ不変な汎関数 $\mathrm{Det}\,\not{D}_L$ を定義しようと試みることもできる. しかし, これは困難に突き当たる. それは, 必要とされる積分可能条件が破られるという局所的障害だ. これはこれまで議論してきたアノマリーに相当する. 局所的な障害が無くても, ゲージ場の配位からゲージ変換の自由度を取り除いたの無限次元空間が単連結でなければ, トポトジー的な障害のためにこの空間で汎関数が一意的に定義できなくなることがある. そのような大域的アノマリーの例はウィッテン[10b]によって発見されたゲージ群 $SU(2)$ (これは局所的アノマリーを持たない) に $SU(2)$ 二重項で質量ゼロの左手フェルミオンが奇数個ある場合だ.

22.4 アノマリーを持たないゲージ理論

ここまで, アノマリーの一般的なカレント J^{μ}_{α} の保存に対する影響を計算してきた. このカレントがそれ自身ゲージ場に結合していると, ゲージ不変性よりアノマリーが無いことが要請される. 前の節ではアノマリーは (22.3.12) で定義される完全に対称な定数因子 $D_{\alpha\beta\gamma}$ に比例していなければならず, このためにゲージ・カレントについて,[11]

$$D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\{T_{\alpha}, T_{\beta}\}\, T_{\gamma}\right] = 0 \tag{22.4.1}$$

となっていなければならない. ここで, T_{α} は全ての左手フェルミオンと左手反フェルミオン場に対するゲージ代数の表現, また, 「tr」は以前と同様にこれらのフェルミオンと反フェルミオンの種類についての和を意味する. もしフェルミオン場が群の適切な既約または可約な表現になっていれば, 任意のゲージ群においてこの条件を満たすことができる. さらに, いくつかのゲージ群では, フェルミオンがその群の任意の表現になっていても (22.4.1) が満たされる. (22.6節ではバタリン・ビルコフスキー形式を使って, そのようなゲージ群についてアノマリーが摂動論の全次数で存在しないことを純粋に代数的に証明する.)

もし左手フェルミオン (と反フェルミオン) 場がゲージ代数の表現であり, その複素共役がそれ自身に同値ならば, 条件 (22.4.1) は明らかに満たされている. これは以下の意味だ.

$$(iT_{\alpha})^{*} = S\,(iT_{\alpha})\,S^{-1}.$$

もしくは, これと同等に (T_{α} を常にエルミートととるから),

$$T_{\alpha}^{T} = -S\,T_{\alpha}S^{-1} \tag{22.4.2}$$

だ. ((22.4.2) を (22.3.12) に代入すると $D_{\alpha\beta\gamma} = -D_{\alpha\beta\gamma}$ を得る.) そのような表現は実か擬実だ. 前者の場合には相似変換 $T'_{\alpha} = R\,T_{\alpha}\,R^{-1}$

でこの表現をT'_αが虚で反対称の表現に変換できる. 後者の場合には, これは不可能だ. (たとえば, $SU(2)$ の3次元既約表現は実だ. また, 2次元表現は擬実だ.) ゲージ代数が実か擬実な表現しか持たなければ, アノマリーは存在しない. そのような代数とは,[13] $SO(2n+1)$ ($SU(2) \equiv SO(3)$ を含んで), $n \geq 2$ の $SO(4n)$, $n \geq 3$ の $USp(2n)$, G_2, F_4, E_7, E_8 とそれらの直和の全てだ. 他のいくつかの代数も, いくつかの表現は実でも擬実でもないが, $D_{\alpha\beta\gamma}$ がゼロとなる表現のみを持っている.[12] それらは, $SO(4n+2)$ ($SO(2) \equiv U(1)$ と $SO(6) \equiv SU(4)$ を除く), E_6, とそれら同士かもしくは上のどれかの代数との直和だ. したがってアノマリーは ($n \geq 3$ の) $SU(n)$ か $U(1)$ 因子を持つゲージ代数でのみ可能だ. たまたま, これらは今日の物理で最も重要なゲージ代数だ. 標準理論はゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に基づいているから, 理論にアノマリーが無いようにするためにクォークやレプトンの間で相殺が起こるようにしなければならない.

22.1表には標準模型の第1世代の左手スピノル場を, 色の群 $SU(3)$ と電磁 $SU(2)$ 群の表現と $U(1)$ の量子数 $y/g' = t_3/g - q/e$ に従って分類している.

ここで T_α, T_β, T_γ が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の生成子の全てをとるとき $D_{\alpha\beta\gamma}$ がゼロとなるかをチェックできる. T_α, T_β, T_γ の積が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のもとで中性になる生成子の組み合わせだけを考えればよい. これは, $D_{\alpha\beta\gamma}$ は他の場合には明らかに必ずゼロとなるからだ. $SU(3)$ の生成子がゼロ, 二つ, 三つの場合には不変量を作ることができる. (なぜなら, 8×8 と $8 \times 8 \times 8$ は両方とも一重項を含むからだ). また $SU(2)$ の生成子はゼロ, 二つ, 三つ, $U(1)$ の生成子は任意の個数でよい. したがって, 以下の組み合わせだけをチェックすればよい.

$SU(3)$–$SU(3)$–$SU(3)$: この場合, 左手フェルミオンが $SU(3)$ の $3 + 3 + \bar{3} + \bar{3} + 1 + 1 + 1$ 表現になり, これは実なので $D_{\alpha\beta\gamma}$ はゼロとなる.

表 22.1: 標準理論の第1世代の左手フェルミオンと反フェルミオン場

フェルミオン	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)\ [y/g']$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	$-1/6$
u_R^*	$\bar{3}$	1	$+2/3$
d_R^*	$\bar{3}$	1	$-1/3$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	$1/2$
e_R^*	1	1	-1

$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{U(1)}$: この場合アノマリーは以下に比例する.

$$\sum_{3,\bar{3}} y/g' = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0\,.$$

$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{SU(2)}$: この場合は $SU(2)$ が実か擬実の表現しか持たないのでアノマリーはない.

$SU(2)$–$SU(2)$–$U(1)$: この場合, アノマリーは以下に比例する.

$$\sum_{\text{doublets}} y/g' = 3\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = 0\,.$$

$U(1)$–$U(1)$–$U(1)$: この場合, アノマリーは以下に比例する.

$$\sum (y/g')^3 = 6\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 = 0\,.$$

以上により, 標準模型のゲージ対称性については全てのアノマリーが相殺することがわかる.[13a] この結果は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ が $SO(10)$ に埋め込めることから簡潔に理解できる.[14] $SO(10)$ の全ての表現はアノマリーを持たないので, $SO(10)$ の完全な表現をなす $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ の任意の可約表現も同じ性質を継承するわけだ. たまたま, 1 世代分のクォーク, レプトン, 反クォーク, 反レプトン, さらにそれに $(SU(3)\times SU(2)\times U(1))$ の 1 重項を加えると, $SO(10)$ の 16 次元表現 (基本スピノル表現) が完全に形成される. したがって, この左手フェルミオンの組についは $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のアノマリーは存在しない. この 1 重項はどうせアノマリーに寄与しないので, 標準模型のゲージ対称性にはアノマリーは存在しない.

計算しなければならないアノマリーはもう一つある. フェルミオンのどの種類も重力と同じように相互作用する. カレント $\bar{\chi}T\gamma^\mu\chi$ の期待値について, 重力の外場のもとでフェルミオン・ループを持つダイアグラムを計算すると (ここで χ は全ての左手のフェルミオン場と反フェルミオン場の列ベクトル), 以下に比例するアノマリー $\partial_\mu(\bar{\chi}T\gamma^\mu\chi)$ が得られる.[15]

$$\mathrm{tr}\{T\}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\kappa\lambda}R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}\,.$$

特に, (22.3.3) のようなゲージ対称性を重力が破らないためには生成子は,

$$\mathrm{tr}\{T_\alpha\} = 0 \qquad (22.4.3)$$

を満たさなければならない. 純粋なゲージ・アノマリーのように, これは (22.4.2) を満たすゲージ群の生成子についてはゼロとなる. したがって, このアノマリーにはゲージ群の実か擬実の表現をなすフェルミオンからの寄与はないので, このアノマリーはゲージ対称性を破ることによって質量を得るフェルミオンのみを考慮にいれて計算すればよい. また, この条件はゲージ代数の $SU(2)$ や $SU(3)$ のような単純部分代数のどの生成子によっても自動的に満たされている. ($\mathrm{tr}\{T_\alpha\}$ は全ての T_β と可換な生成子の数だ. そのため, それがゼロでなければ, その代数は単純ではない.) したがって, (22.4.3) がゲージ群の $U(1)$ 生成子によって満たされているかだけをチェックすればよい. 標準模型では, 全ての左手フェルミオンの弱ハイパー・チャージ y の和は,

$$\sum y/g' = 6\left(-\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-1) = 0$$

となるから, 標準模型のカレントには重力アノマリーは存在しない.

アノマリーがゼロとなる要請は現実的な理論を作る上の指針となる. たとえば, $SU(3)\times SU(2)$ の様々な多重項の弱ハイパー・チャージ y はもともと実験から得られた. しかし, なぜこれらの弱ハイパー・チャージ (および対応する各多重項の平均電荷) が観測された値をとるのか不思議に思うこともあるだろう. この質問に答えるために, 多重項 (u_L, d_L), u_R^*, d_R^*, (ν_L, e_L), e_R^* にそれぞれ, 任意の弱ハイパー・チャージ a, b, c, d, e を与えたとしよう. アノマリーが相殺する条件から以下がわかる.

$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{U(1)}$:

$$\sum_{3,\bar{3}} y = 2a + b + c = 0\,;$$

$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{U(1)}$:

$$\sum_{\text{doublets}} y = 3a + d = 0\,;$$

$\boldsymbol{U(1)}$–$\boldsymbol{U(1)}$–$\boldsymbol{U(1)}$:

$$\sum y^3 = 6a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 2d^3 + e^3 = 0\,;$$

重力子–重力子–$\boldsymbol{U(1)}$:

$$\sum y = 6a + 3b + 3c + 2d + e = 0\,.$$

u_R と d_R を交換する可能性を除いては, これらの方程式の解は二つだけだ. それらを $U(1)$ と $U(1)'$ と呼ぶ.

$$U(1): \qquad b/a = -4\,, \quad c/a = 2\,, \quad d/a = -3\,, \quad e/a = 6\,,$$

$$U(1)': \qquad b = -c\,, \quad a = c = d = e = 0\,.$$

さらに, これらの解は排他的だ. つまり, $U(1)$ と $U(1)'$ の両方が局所的だとすることはできない. これは, そうすると $(-4)+(+2) \neq 0$ に比例する $U(1)'$–$U(1)'$–$U(1)$ アノマリーと, $(-4)^2 - (+2)^2 \neq 0$ に比例する $U(1)'$–$U(1)$–$U(1)$ アノマリーが生じるからだ. $U(1)$ 生成子は単に標準電弱理論の弱ハイパー・チャージであり (全体の定数因子 a は g' の定義に含めておく), $U(1)'$ 対称性は自然界に観測されるどのような対称性にも似ていない. この小さな計算から標準理論での y の値, すなわち電荷の与え方について論理的な説明が得られた. これより, クォークとレプトンの1世代内で全てのゲージ・アノマリーが相殺しなければならないならば, ゲージ・ボゾンが弱ハイパー・チャージ以外のどんな $U(1)$ 量子数とも結合することは不可能なことがわかる.

一方, 標準模型で $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のゲージ・ボゾンが知られているクォークとレプトンにのみ結合すると仮定するのは妥当だが (これは, 他のフェルミオンが発見されていないことを説明するし, また, 標準模型のアノマリーの美しい相殺を保つためでもある), 他の $U(1)'$ ゲージ・ボゾンが他の発見されていない $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ について中性のフェルミオンや知られているクォークとレプトンに結合し

ているかもしれない．多重項 (u_L, d_L), u_R^*, d_R^*, (ν_L, e_L), e_R^* の $U(1)'$ 量子数 y' をそれぞれ a', b', c', d', e' としよう．$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ について中性のフェルミオンについては何も知識を持っていないので，$U(1)'$–$U(1)'$–$U(1)'$ と重力子–重力子–$U(1)'$ アノマリーが消える要請は何ら a', b', c', d', e' を拘束する助けにならない．残りのアノマリーがゼロとなる条件から以下がわかる．

$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{SU(3)}$–$\boldsymbol{U(1)'}$:

$$\sum_{3,\bar{3}} y' = 2a' + b' + c' = 0\ ;$$

$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{SU(2)}$–$\boldsymbol{U(1)'}$:

$$\sum_{\text{doublets}} y' = 3a' + d' = 0\ ;$$

$\boldsymbol{U(1)}$–$\boldsymbol{U(1)}$–$\boldsymbol{U(1)'}$:

$$\sum y^2 y' = 6a' + 3(-4)^2 b' + 3(2)^2 c' + 2(-3)^2 d' + (6)^2 e' = 0\ ;$$

$\boldsymbol{U(1)}$–$\boldsymbol{U(1)'}$–$\boldsymbol{U(1)'}$:

$$\sum y y'^2 = 6a'^2 + 3(-4) b'^2 + 3(2) c'^2 + 2(-3) d'^2 + (6) e'^2 = 0\ .$$

一般的な解では y' は y と量子数 $B-L$ の線形結合だ．(ここで B と L は通常の意味のバリオン数とレプトン数で，多重項 (u_L, d_L), u_R^*, d_R^*, (ν_L, e_L), e_R^* についてそれぞれ，1/3, −1/3, −1/3, −1, +1 となる.) 通常の物体は巨視的な $B-L$ の値を持つから，もし $B-L$ が局所的対称性であり，その結合定数が e よりも何桁も小さいということがなければ，それは自発的に破れていなければならない．中性カレントの観測との矛盾を避けるために，対称性の破れの典型的なスケール F は電弱相互作用のスケールよりも大きくなければならないが，何桁も大きい必然性はない．したがって，$B-L$ に結合する Z^0 より幾分か重

い中性ベクトル・ボゾンが標準模型に付け加わるのは, 最も考えられる可能性だ.

これまでの議論は標準模型の1世代についてのものだ. 3世代だと, アノマリーを持たない対称性がより多くある. アノマリーおよび(我々の知る限り)他の何にも破られない対称性の組の一つは, 各種のフレーバーのレプトン数の差からなる. $B-L$ と共に, これは23.5節でアノマリーによるバリオン数とレプトン数の非保存過程を分類する際に重要となる.

22.5 質量ゼロの束縛状態*

ときに, クォークとレプトンはより基本的な粒子の束縛状態ではないかという推測がなされる. この仮想的基本粒子が量子色力学でのように漸近的に自由な相互作用をするなら, それらは閉じ込められると期待され, なぜ観測にかからないかが説明できる. しかし, この描像には困難もある. クォークとレプトンの内部構造はいままで全く観測されていないから, これらのゲージ相互作用の典型的エネルギー・スケール Λ' (量子色力学の $\Lambda \approx 200$ MeV に類似のもの) は非常に高くなければならない. たとえば, 12.3節で述べたように, ミュー中間子の磁気モーメントについて実験と理論の一致から $\Lambda' > 3$ TeV であると示唆される. しかし, ゴールドストン・ボゾンを除いて, そのような理論の束縛状態は通常 Λ' か, 多分 $2\pi\Lambda'$ の程度の大きさの質量を持つと期待される. これは量子力学で陽子の質量が $2\pi\Lambda_{\mathrm{QCD}}$ の程度の大きさであることに対応する. この期待値はもちろんクォークとレプトンの質量の観測値が Λ' より非常に小さいことと明白に矛盾する. この問題を言い換えると, もしレプトンとクォークが束縛状態ならば, な

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

ぜその大きさ (異常磁気モーメント等から測ったもの) がそれらのコンプトン波長に比べて非常に小さいのかということだ.

この問題に答える一つの方法は, 量子色力学とは異なり, この理論は破れていないカイラル対称性を持っていて, クォークとレプトンを質量ゼロに保ち, これに他の相互作用から小さな補正が加わると仮定することだ. 一般に, カイラル対称性はある質量ゼロの与えられたヘリシティの基本場(と反対のヘリシティの場の複素共役) の組が複素表現をなす任意の対称性をいう. 真空に基本場の積を働かせ, これらの対称性の複素表現をなすヘリシティの決まった他の状態を構成することができる. これらの状態のどれかが実際の複合粒子ならば, それらは質量ゼロでなければならない. なぜなら, 質量がゼロでない粒子の全てのヘリシティ成分は回転と可換な任意の対称性の同じ表現をなさなければならず, ある粒子のヘリシティ成分と反粒子の反対のヘリシティ成分が与えられれば実表現が得られるからだ. もちろん, このように構成したどの状態が実際の質量ゼロの複合粒子に対応するかを見つけるのは簡単なことではないかもしれない. しかし, どれかの状態が対応すれば, それらの質量がゼロであることは自然だ. なぜなら, 対称群の複素表現に属するある与えられたヘリシティの質量ゼロの粒子が理論のパラメータを変えたときに質量を得るには, それらの対称性のもとでの性質は複素表現から実表現へと不連続に変化しなければならないからだ.

この理由から, 質量がゼロか非常に軽い複合粒子を持つのが自然な理論が存在することがわかるが, それらが実際に実現しているかはわからない. この問題は, クォークとレプトンが複合粒子かどうかという現実問題を別にしても, それ自身興味のあるものだ. ト・フーフト[16]はアノマリーの考察にもとづいてこの問題に答える非常に強力な方法を提案した. 簡潔に述べるとこうだ. いま基本となる理論が大域的カイラル対称性(ゲージ・アノマリーで破られておらず, 自発的

にも破れていないもの) を持っていて, この対称性が生成子 T_α, T_β 等で基本粒子であるスピン $\frac{1}{2}$ の左手フェルミオン(と反フェルミオン) χ に働き, これらの大域的対称性のアノマリーの定数 $\mathrm{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ がゼロでないとする. このとき, 束縛状態のスペクトルはスピン $\frac{1}{2}$ の質量ゼロの粒子を持ち, 同じ対称性が生成子 $\mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\beta$ 等でその左手状態を変換し, そのアノマリーの定数は,

$$\mathrm{tr}[\{\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta\}\mathcal{T}_\gamma] = \mathrm{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma] \tag{22.5.1}$$

となる.

ト・フーフトの議論は以下のようなものだ. ある弱く相互作用するゲージ・ボゾンが基本理論の大域的対称性の生成子 T_α, T_β, 等と結合しているとする. 係数 $D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \mathrm{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ のどれかがゼロではないが, このアノマリーは他の質量ゼロの「傍観」(spectator) フェルミオンによって相殺されているとする. この傍観フェルミオンは複合粒子の構成粒子を閉じ込める強い相互作用をしないとする. 閉じ込めの相互作用のエネルギー・スケール Λ' よりずっと低いエネルギーでの物理的過程は, 閉じ込められたフェルミオンを含まない有効ラグランジアン密度で記述されるだろう. もし生成子 T_α, T_β 等の対称性が自発的に破れていないなら, ゴールドストン・ボゾンは存在しない. したがって, この有効ラグランジアンに現れる粒子は弱く結合したゲージ・ボゾンと傍観フェルミオン, それに閉じ込められたフェルミオンと強く相互作用するゲージ・ボゾンの質量ゼロの束縛状態だ. 有効場の理論が矛盾しないためにはアノマリーを持っていてはならない. しかし, 傍観フェルミオンは仮定により $-D_{\alpha\beta\gamma}$ に等しいアノマリーの定数を持つ. したがって, 質量ゼロの束縛状態があって, これに等しく反対符号のアノマリーの定数を与えなければならない. したがって, この定数はもとの閉じ込められたフェルミオンと同じだ.** この議論は, 生成子が T_α, T_β 等である

** これらの粒子がスピン $\frac{1}{2}$ を持たなければならないことも証明しなければならな

ゲージ相互作用がいかに弱くても成立する．したがって，これらのゲージ・ボゾンと閉じ込められたフェルミオンは実際の粒子である必要は無く，質量ゼロのスピン $\frac{1}{2}$ の束縛状態が，それらを構成するスピン $\frac{1}{2}$ の閉じ込められた基本粒子であるフェルミオンのアノマリーと同じアノマリーを与えるという結論が導かれる．

簡単な例として，基本理論が n 個の「フレーバー」の質量ゼロのフェルミオンを持ち，そのそれぞれが漸近的自由な $SU(N)$ ゲージ群の基本表現になっている左手と右手成分を持っているとする．$SU(N)$ のもとで中性な閉じ込められないフェルミオン的束縛状態が存在できるように N は奇数だとする．量子色力学と同じように，この理論は自動的に大域的 $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U_V(1)$ 対称性を持つ．その対称性のもとで，左手と右手の質量ゼロのフェルミオンはそれぞれ，$(n,1)$ と $(1,n)$ 表現になっている．その両方がともに $U_V(1)$ の同じ量子数を持ち，それは1とできる．基本理論の $SU(n)_L$–$SU(n)_L$–$U(1)_Y$ と $SU(n)_R$–$SU(n)_R$–$U(1)_Y$ のカレントの3重項にはゼロではないアノマリーが生じる．それらは，

$$D_{aL,bL,0} = D_{aR,bR,0} = N\delta_{ab}$$

という値をとる．ここで，a, b, 等は $SU(n)$ の生成子 λ_a の添字だ．これらの生成子は n 成分を持つ基本表現において，$\mathrm{tr}\{\lambda_a\lambda_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ と

い．ここで我々はゴールドストン・ボゾンは無い，また他のスピン・ゼロの粒子は自然には質量ゼロとならないと仮定している．また，理論の基本ゲージ・ボゾンはアノマリーを持つ対称性変換のもとで中性だと仮定しているから，アノマリーには寄与できない．スピン $j \geq 1$ の複合粒子は別の議論で退けることができる．[16a] これはアノマリーを持つカレントがスピン $\frac{1}{2}$ の基本場のローレンツ4元ベクトル関数として構成できる理論だ．そして，アノマリーに寄与するには，これらのカレントが任意の質量ゼロでスピンが $j = 1$ の複合粒子間でゼロとならない行列要素を持つはずだが，これはローレンツ不変性に反する．スピン $j \geq 3/2$ の質量ゼロの複合粒子も許されない．なぜなら，この理論では保存されるエネルギー・運動量テンソルを構成することも可能であり，それはこれらの複合粒子の間でゼロとならない行列要素を持つだろうが，それは $j \geq 3/2$ でやはりローレンツ不変性に背くからだ．

規格化されている. $n > 2$ では, $SU(n)_L$–$SU(n)_L$–$SU(n)_L$ と $SU(n)_R$–$SU(n)_R$–$SU(n)_R$ カレントについてゼロではないアノマリーの定数が生じる. それらは,

$$D_{aL,bL,cL} = D_{aR,bR,cR} = N\mathrm{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}, \lambda_c]$$

に等しい.

ここで, $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U(1)$ 対称性は自発的に破れてはいないと仮定する. 閉じ込めのために, 物理的なスペクトルのフェルミオン的束縛状態は, ヘリシティがそれぞれ, $+\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の m_L 個と m_R 個の基本フェルミオンとそれらの $\bar{m}_L$ 個と $\bar{m}_R$ 個の反フェルミオンで以下を満たすものから構成されるこの $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U(1)$ 対称性の表現に含まれているはずだ.

$$m_L + m_R - \bar{m}_L - \bar{m}_R = kN \, . \tag{22.5.2}$$

ここで k は任意の正か負の奇数だ. したがって, 登場する $SU(n)_L \times SU_R(n)$ の唯一の既約表現 (r, s) は, r が $SU(n)$ の m_L 個の基本表現とそれらの $\bar{m}_L$ 個の複素共役との直積に含まれていて, s は $SU(n)$ の m_R 個の基本表現とそれらの $\bar{m}_R$ 個の複素共役との直積に含まれ, $U(1)_V$ の量子数が kN であり, $k, m_L, m_R, \bar{m}_L, \bar{m}_R$ が (22.5.2) の条件を満たすものだけだ. $p(r, s, k)$ を $SU_L(n) \times SU_R(n)$ の既約表現 (r, s) で $U(1)_V$ 量子数が kN のものが, ヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の束縛状態に現れる回数とする. そうすると, (22.5.1) は以下となる.

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s \, \mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c] = N \, \mathrm{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c] \, , \tag{22.5.3}$$

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s k \, \mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}] = \mathrm{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}] \, . \tag{22.5.4}$$

ここで $\mathrm{tr}^{(r)}$ は $SU(n)$ の既約表現 r のトレース, また, d_s は $SU(N)$ の表現 s の次元を意味する. $p(r, s, k)$ に対する他の拘束条件はそれらが正の整数だということだけだ.

$SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ の任意の表現 (r,s,k) の複素共役 $(\bar{r},\bar{s},-k)$ のトレース $\mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c]$ と $k\,\mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}]$ の値は, 表現 (r,s,k) と反対の値をとる. したがって, (22.5.3) と (22.5.4) は,

$$\ell(r,s,k) \equiv p(r,s,k) - p(\bar{r},\bar{s},-k)$$

の値を拘束するだけだ. ここで使ってきた記法ではこれらのトレースは全てのヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の質量ゼロの束縛状態についてとることを思い出そう. これには, 複素共役表現として変換するヘリシティ $-\frac{1}{2}$ の質量ゼロの束縛状態の反粒子も含む. $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ の任意の表現の複素共役において $\mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c]$ と $k\,\mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}]$ の値はもとの表現の反対だ. したがって (22.5.3) と (22.5.4) では$U(1)_V$ の量子数が $kN > 0$ の表現についてのみ和をとればよい.

$$\sum_{r,s,k>0} \ell(r,s,k)\, d_s\, \mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c] = N\,\mathrm{tr}[\{\lambda_a,\lambda_b\}\lambda_c]\ , \qquad (22.5.5)$$

$$\sum_{r,s,k>0} \ell(r,s,k)\, d_s k\, \mathrm{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a,\mathcal{T}_b\}] = \mathrm{tr}[\{\lambda_a,\lambda_b\}]\ . \qquad (22.5.6)$$

ここで, $\ell(r,s,k)$ は $SU_L(n) \times SU_R(n)$ の既約表現 (r,s) で $U(1)_V$ 量子数が $kN > 0$ のものがヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の束縛状態に現れる回数から, 同じ表現がヘリシティ $-\frac{1}{2}$ の束縛状態に現れる回数を引いたものだ. (もしパリティが破れていないならば, 表現 r,s,k はヘリシティ $-\frac{1}{2}$ の束縛状態に, 表現 s,r,k がヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の束縛状態に現れると同じ回数だけ表れなければならず, $\ell(r,s,k) = -\ell(s,r,k)$ となる.)

まず $n=2$ フレーバーの場合を考える. 三つの3元ベクトルを対称に組んで$SU(2)$ 不変量を作ることはできないから, (22.5.5) の両辺は自動的にゼロとなり, 条件 (22.5.6) のみが残る. $SU(2)$ の2成分基本表現はこれらの2成分表現の任意の奇数個の積に含まれているから, r が非自明な全ての $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ の表現については (22.5.6) の解が $\ell(r,s,k) = 0$ となることがわかる. 例外は, r が基本表現, s が

単位表現で $k=1$ のときで, その場合 $\ell=1$ となる. 不幸にも, この解は唯一だとはとてもいえない. つまり, 基本理論のアノマリーを再現するには無限個のやり方がある.

一般的な n と N については(22.5.5) と (22.5.6) には多くの解が見つかるのが普通だ. しかし, いくつかの場合には解が無いということもある. そのような理論では, $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ 対称性は部分的かあるいは全部が自発的に破れていなければならないという結論に到達する. これは特に量子色力学について興味ある結果を導くので, 特に $SU(3)$ ゲージ群について考察しよう.

明確にするために, $k=1$ と $\bar{m}_L=\bar{m}_R=0$ の表現を集中して調べる. これは反フェルミオンは無しで, 三つの基本フェルミオンだけから作られる. 存在するのは以下の場合だ.†

(a) r が $SU(n)$ の対称3階テンソルで, s が単位表現.

(b) r が $SU(n)$ の反対称3階テンソルで, s が単位表現.

(c) r が $SU(n)$ の3階テンソルで対称性は混じっていて, s が単位表現.

(d) r が $SU(n)$ の対称2階テンソルで, s が $SU(n)$ のベクトル.

(e) r が $SU(n)$ の反対称2階テンソルで, s が $SU(n)$ のベクトル.

(f) r が $SU(n)$ のベクトルで, s が $SU(n)$ の対称2階テンソル.

(g) r が $SU(n)$ のベクトルで, s が $SU(n)$ の反対称2階テンソル.

(h) r が単位表現で, s が $SU(n)$ の対称3階テンソル.

(i) r が単位表現で, s が $SU(n)$ の反対称3階テンソル.

(j) r が単位表現で, s が $SU(n)$ の3階テンソルで対称性は混じっている.

---

†全ての $SU(N)$ ベクトルとテンソルは反変とする.

$n > 2$ では, (22.5.5) と (22.5.6) は以下となる.[††]

$$\tfrac{1}{2}(n+3)(n+6)\ell_a + \tfrac{1}{2}(n-3)(n-6)\ell_b + (n^2-9)\ell_c + n(n+4)\ell_d$$
$$+n(n-4)\ell_e + \tfrac{1}{2}n^2(n+1)\ell_f + \tfrac{1}{2}n^2(n-1)\ell_g = 3\,. \tag{22.5.7}$$

さらに,

$$\tfrac{1}{2}(n+2)(n+3)\ell_a + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\ell_b + (n^2-3)\ell_c + n(n+2)\ell_d$$
$$+n(n-2)\ell_e + \tfrac{1}{2}n(n+1)\ell_f + \tfrac{1}{2}n(n-1)\ell_g = 1\,. \tag{22.5.8}$$

(22.5.7) を満たすのには問題無いが, もし n が3の倍数ならば ℓ のどんな値についても, (22.5.8) の左辺の各項もまた3の倍数となり, この条件を満たすことが不可能になる. 特に, 3つのフレーバーの質量ゼロのクォークを持つ量子色力学の $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 対称性は自発的に破れていなければならないと結論できる. この結果は **(a)**–**(j)** の表現に限らず, 色について中性なクォークと反クォークの組み合わせからなるどんな $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ の表現にも当てはまる.

* * *

$SU(3)$ ゲージ群で, $SU(3)$ の3重項の基本フェルミオンが $n = 3$ 個あるという特別な場合を除いて, ト・フーフトのアノマリー一致条件はあまり制限的なわけではない. 一般にはカイラル対称性が破れないときには多くの種類の質量ゼロの束縛状態が許される. ト・フーフトはまた, **非結合条件** (decoupling condition) も提案した. これは一つ以上の基本フェルミオン・フレーバーが非常に重くなったときに, 重い基本フェルミオンを含む複合粒子が質量を得るのを妨げるカイラル対称性は破れずに残っていてはならないという要請だ. たとえば,

[††] 文献16では, ト・フーフトはパリティは自発的には破れないと仮定した. そのため, これらの表式は $\ell_a = -\ell_h$, $\ell_b = -\ell_i$, $\ell_c = -\ell_j$, $\ell_d = -\ell_f$, $\ell_e = -\ell_g$ の場合に与えられた. ここで見るように, 主要な結論はパリティ保存に依存しない.

$SU(3)$ 色ゲージ群の場合は, n 種のクォークの内, 1種類に大きな質量を与えると, 一つの質量のあるクォークを含む3フェルミオン束縛状態は $SU(n-1) \times SU(n-1)$ 群の (r', s') 表現になり, これは以下のどれかの場合になる.

(v) r' が $SU(n-1)$ の対称2階テンソル, s' が単位表現.

(w) r' が $SU(n-1)$ の反対称2階テンソル, s' が単位表現.

(x) r' と s' が $SU(n)$ のベクトル.

(y) r' が単位表現で, s' が $SU(n-1)$ の対称2階テンソル.

(z) r' が単位表現で, s' が $SU(n-1)$ の反対称2階テンソル.

3フェルミオン質量状態が大きな質量を得るためには, $\ell'(r', s') = 0$ が成立することが必要だ. ここで $\ell'(r', s')$ は既約表現 (r', s') がヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の束縛状態に表れる数から同じ表現がヘリシティ $-\frac{1}{2}$ の束縛状態に表れる数を引いたものだ. $SU(n) \times SU(n)$ の3フェルミオン表現の一覧 **(a)**–**(j)** を見ると, それらが $SU(n-1) \times SU(n-1)$ のどの表現になるかがわかる. これにより, ト・フーフトの非結合条件が以下を要請することがわかる.[†]

$$
\begin{aligned}
0 &= \ell'_v = \ell_a + \ell_c + \ell_d \,, \\
0 &= \ell'_w = \ell_b + \ell_c + \ell_e \,, \\
0 &= \ell'_x = \ell_f + \ell_g + \ell_d + \ell_e \,, \\
0 &= \ell'_y = \ell_f + \ell_h + \ell_j \,, \\
0 &= \ell'_z = \ell_g + \ell_i + \ell_j \,.
\end{aligned}
\tag{22.5.9}
$$

[†] ト・フーフトが調べたパリティを保存する場合には, 4番目と5番目の方程式は1番目と2番目と同じであり, 3番目は無内容となる.

不幸にも，ほぼ全ての場合に解はやはり無限個あり，ℓ が n に独立な整数になる解は存在しない．

非結合条件は非常にもっともらしい．しかし，ト・フーフトのこの条件の使い方は議論を呼んだ.[17] これは一つ以上のフェルミオンの質量が増えるに従い，通常，相転移が起こり，質量スペクトルはフェルミオン質量が小さいときとは異なってしまうということに基づいている．さらに**質量持続条件** (persistent mass condition) と呼ばれるより強い条件もある．これは一つ以上の基本フェルミオン・フレーバーがどんな質量を得ても，これらの質量を持つ基本フェルミオンを含む複合粒子が質量を得るのを防ぐカイラル対称性は全て破れていなければならない，という条件だ.[17] これがもし正しければ，相転移にかかわらず，たとえばト・フーフトが述べた (22.5.9) のような結論が質量持続条件から導かれる．

質量持続条件が破られる非現実的な模型を構成するのは簡単だ．これはたとえば自発的に破れたカイラル的ではない対称性で，質量ゼロのゴールドストン・ボゾンが質量を持つフェルミオンの複合粒子として作られる理論だ.[17] (これらの模型はフェルミオンの質量が増えると相転移を起こす．これにより非結合条件からト・フーフトが得た結論が当てはまらなくなる.) しかし，19.9 節で述べたバファとウィッテンの仕事では，より現実的なQCD的理論の類で，非カイラル対称性が自発的には破れないということが示された．したがって，これは質量持続条件に対する深刻な反対ととることはできない．

22.6 無矛盾条件

どんな対称性のアノマリーに現れる数係数も理論の物質の内容に依存する．一方，アノマリーの形は理論の詳細にはあまり依存しない．これは1971年に最初にヴェスとズミノによって与えられた無矛盾条

件[18]によって決まっているからだ.

大域的対称性のアノマリーに興味があるときにでも, 無矛盾条件を導くには全ての対称性カレントがゲージ場に結合し, 非可換対称性ではゲージ場同士も結合し, そのためにこれらの対称性がラグランジアン密度の局所対称性になると想定すると便利だ. 対応するゲージ結合定数を微小にすることで, いつでも対称性が大域的な場合に戻ることができる. この形式では, アノマリーを除いては, 背景ゲージ場 $A_{\alpha\mu}(x)$ の有効作用 $\Gamma[A]$ はゲージ場に対する微小変換 $A_{\beta\mu}(y) \to A_{\beta\mu}(y) + i\int d^4x\, \epsilon_\alpha(x)\, \mathcal{T}_\alpha(x)\, A_{\beta\mu}(y)$ のもとで不変だ. ここで変換 (15.1.9) を再現するように,

$$-i\mathcal{T}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} - C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{\gamma\mu}(x)} \tag{22.6.1}$$

ととらねばならない. アノマリーを考慮すると, $\mathcal{T}_\alpha(x)$ は $\Gamma[A]$ を消さず,

$$\mathcal{T}_\alpha(x)\Gamma[A] = G_\alpha[x;A] \tag{22.6.2}$$

となる. ここで $G_\alpha[x;A]$ はアノマリーの影響を表す. (22.6.2) はまたカレントの期待値の共変発散の表式として書くこともできる.

$$D_\mu\langle J^\mu_\alpha(x)\rangle = -iG_\alpha[x;A]\ . \tag{22.6.3}$$

ここで,

$$\langle J^\mu_\alpha(x)\rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)}\Gamma[A] \tag{22.6.4}$$

であり, D_μ は $(t_\beta)_{\gamma\alpha} = -iC_{\alpha\beta\gamma}$ の随伴表現でのゲージ共変微分 (15.1.10) だ.

ヴェス・ズミノ無矛盾条件は以下の交換関係から得られる.*

$$[\mathcal{T}_\alpha(x), \mathcal{T}_\beta(y)] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)\mathcal{T}_\gamma(x)\ . \tag{22.6.5}$$

---

*(22.6.1) の因子 $-i$ は, この交換関係に伴う構造定数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ に通常の $+i$ 因子を与えるために入れてある. 注意: ここで構造定数が完全反対称になるようなリー代数の基底を使っているから, 上と下の添字は区別しない.

(22.6.2) と (22.6.5) から一般の無矛盾条件,

$$\mathcal{T}_\alpha(x)G_\beta[y;A] - \mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x;A] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[y;A] \quad (22.6.6)$$

が導かれる.

これらの無矛盾条件は元はヴェス・ズミノによって強い相互作用のカイラル $SU(3)\times SU(3)$ 対称性について導かれた. これは歴史的に重要なだけでなく物理的にも重要な特別な場合だ. ここでゲージ場に働く生成子 $\mathcal{T}_\alpha(x)$ は, (22.3.31) で定義される偶のパリティの生成子 $\mathcal{Y}_a(x)$ と, (22.3.32) で定義される奇のパリティの生成子 $\mathcal{X}_a(x)$ からなる.** これらは交換関係,

$$[\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{Y}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{Y}_c(x)\ ,$$

$$[\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{X}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{X}_c(x)\ ,$$

$$[\mathcal{X}_a(x), \mathcal{X}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{Y}_c(x)$$

を満たす. ここで, f_{abc} は $SU(3)$ の構造定数だ. $\mathcal{Y}_a$ で生成される $SU(3)$ 部分群は自発的に破れてはいないから, フェルミオン運動量に関する積分を, $\mathcal{Y}_a$ で生成されるゲージ変換のもとでの不変性が保たれるように取り扱うと便利だ. こうすると,

$$\mathcal{Y}_a(x)\,\Gamma = 0$$

となり, ゼロでないアノマリー,

$$\mathcal{X}_a(x)\,\Gamma = G_a(x)$$

が残る. すると, 自明でない無矛盾条件は,

$$\mathcal{Y}_a(x)G_b(y) = i\delta^4(x-y)f_{abc}G_c(x)$$

**もう一つの注意: 22.3 節で述べたように, ここで使った $\mathcal{X}_a$ と $\mathcal{Y}_a$ は文献8 で Y_a と X_a と呼ばれているものだ.

と,

$$\mathcal{X}_a(x)G_b(y) - \mathcal{X}_b(x)G_a(y) = 0$$

になる. 上の第1の条件は, 単に $G_a(x)$ は通常の $SU(3)$ 変換のもとで8重項として変換されることを意味し, 第2の条件は $G_a(x)$ に他の強い拘束を課す. 読者はこの条件が $G_a(x)$ のバーディーン表式 (22.3.34) によって満たされていることを確認されたい. ここではそれに立ち入らず, 例題として一般のゲージ理論で全てのカレントを対称に扱う. 22.3節でこの場合のアノマリーについて (22.3.38) を引用したが, この表式のゲージ場についての2次より高い次数の項は導出しなかった. ここでこれらの高次項が無矛盾条件 (22.6.6) によって決まることを示す.

この目的のために, そしてさらに一般化をするために, ヴェス・ズミノ無矛盾条件を15.7節で述べた BRST 変換のもとでの不変性条件として再構成するのが便利だ. 一般のゲージ場でゴースト場 ω_α を導入して, ベキ零の BRST 演算子 s を以下のように書く.

$$sA_{\alpha\mu} = \partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma\ , \tag{22.6.7}$$

$$s\omega_\alpha = -\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma\ . \tag{22.6.8}$$

ここで s は分配則 $s(AB) = (sA)B \pm A(sB)$ を満たし, 符号は A が ω_α のようにフェルミオン的な量ならば負, そうでなければ正とする. アノマリー関数 $G_\alpha[x;A]$ の代りに汎関数,

$$G[\omega, A] = \int \omega_\alpha(x)\, G_\alpha[x;A]\, d^4x \tag{22.6.9}$$

を使う. すると, (ω_α がフェルミオン的だということを忘れずに) 以下を得る.

$$sG[\omega, A] = -\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\int d^4x\ \omega_\beta(x)\,\omega_\gamma(x)\, G_\alpha[x;A]$$

$$
\begin{aligned}
&-\int d^4x\,\omega_\alpha(x)\int d^4y\;\left[\frac{\partial\omega_\beta(y)}{\partial y^\mu}+C_{\beta\gamma\delta}A_{\gamma\mu}(y)\omega_\delta(y)\right]\\
&\qquad\times\frac{\delta G_\alpha[x;A]}{\delta A_{\beta\mu}(y)}\\
&=\int d^4x\int d^4y\,\omega_\alpha(x)\,\omega_\beta(y)\Big[-\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[x;A]\\
&\qquad+i\,\mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x;A]\Big]\,.
\end{aligned}
$$

ゴースト場は互いに反可換だから, これは以下のとおりに書くことができる.

$$
\begin{aligned}
sG[\omega,A]=-\tfrac{1}{2}i\int d^4x\int d^4y\,\omega_\alpha(x)\,\omega_\beta(y)\\
\times\Big[iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[x;A]+\mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x;A]\\
-\mathcal{T}_\alpha(x)G_\beta(y;A)\Big]\,.
\end{aligned}
$$

無矛盾条件 (22.6.6) は, $G[\omega,A]$ が全てのゴースト場 $\omega_\alpha(x)$ についてBRST 不変,

$$sG[\omega,A]=0 \tag{22.6.10}$$

のときに限って成立することがわかる.

ここで, アノマリー $G[\omega;A]$ が局所的汎関数 $F[A]$ に BRST 演算子 s を作用させたものと書ける可能性を考える.

$$G[\omega;A]=sF[A]\,. \tag{22.6.11}$$

(汎関数 F はゴースト場から独立でなければならない. これは, アノマリー汎関数 G はすでにゴースト場について線形だが, 演算子 s がゴースト場の因子を一つ加えるからだ.) BRST 演算子は $s^2=0$ を満たすから, このようなアノマリーは無矛盾条件 $sG=0$ を満たす. もし $F[A]$ がゲージ場の局所的[†]汎関数ならば, それを作用から差し引い

[†]局所的汎関数とは局所関数, つまりある与えられた点の場と場の微分の関数, の積分を意味する.

てアノマリーを相殺できる. 同じことは局所汎関数に BRST 演算子 s を作用させた形に書けるアノマリーの任意の項にも当てはまる. つまり, そのような項はそれ自身で無矛盾条件を満たし, 作用に局所的な項を加えることで相殺できる. したがって, 我々に興味のあるアノマリーは, 無矛盾条件 (22.6.10) を満たしゴースト数が 1 の局所汎関数 $G[\omega; A]$ から, ゴースト数ゼロの局所汎関数に s が作用した形の部分を全て引き去ったものだ. ベキ零の演算子の通常の用語に従えば, そのような汎関数の同値類は s 演算子のゴースト数 1 の**コホモロジー** (cohomology) を成すという.

これは局所密度自身を使って表すこともできる. アノマリー (もしくはアノマリーの任意の項) を $G = \int d^4x\, \mathcal{G}(x)$ と書くことができる. ここで $\mathcal{G}(x)$ は時空の点 x でのゲージ場とゴースト場, およびそれらの微分についての冪級数だ. $sG = 0$ という条件は以下の表式と同値だ.

$$s\mathcal{G}(x) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x)\ . \tag{22.6.12}$$

ここで, $\mathcal{J}^\mu(x)$ は場と場の微分のある関数だ. 同様に, 作用に局所的な項を付け加えて相殺できる $\mathcal{G}$ の中の項は, 微分を除いて $s\mathcal{F}$ の形のものだ. したがって, 我々に興味のあるアノマリーは, 無矛盾条件 (22.6.12) を満たしゴースト数が 1 の局所関数から, ゴースト数がゼロのある局所関数に s が作用した分だけ差し引き, さらにそれから微分だけ差し引いたものだ. これは, 微分の分だけ差し引いた局所関数の空間でゴースト数が 1 の s のコホモロジーとして知られていて, 通常 $H^1(s|d)$ と書かれる.

代数的方法を使って BRST 演算子 s のコホモロジーが調べられていて, これより一般のゲージ理論でのアノマリーの形がわかる.[19] この手法では理論に含まれる物質の内容に依存する定数係数のみがわからない. これは 22.2 節と 22.3 節の方法で計算しなければならない. 一般のゲージ理論でゲージ場について 2 次のアノマリー項は, その定

数係数もすでに計算したので, ここでは無矛盾条件 (22.6.12) を使って場について高次の項を計算する.

22.3節で見たように, 全てのカレントを対称に扱うと, 場について2次の項は (22.3.26) の表式の3分の1だ. (質量で勘定して) 次元4の演算子もあり, ヴェス・ズミノ無矛盾条件 (22.6.6) は同じ次元の演算子を関係付けるので, この条件を満たすためには次元が同じで場について高次の項のみを足せばよい. したがって, 以下の形 (これは必ずしも唯一の可能性ではない) の無矛盾条件の解を探す.

$$\begin{aligned} G_\alpha &= i[\langle \partial_\mu J^\mu_\alpha \rangle]_{\text{anom}} \\ &= -\frac{i}{24\pi^2}\,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\left\{T_\alpha\Big[\partial_\kappa A_\nu\,\partial_\lambda A_\rho + ic_1\partial_\kappa A_\nu\,A_\lambda A_\rho\right. \\ &\qquad \left. + ic_2 A_\kappa\,\partial_\nu A_\lambda\,A_\rho + ic_3 A_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho - c_4 A_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{22.6.13}$$

ここで $A_\mu \equiv A_{\alpha\mu}T_\alpha$ で c_i は決めるべき定数だ.

努力を大幅に軽減するためには, これを微分形式の言葉を使って書くとよい. (8.8節を見よ.) c数のパラメータの集合 dx^μ を導入し, これは互いに, またゴースト場 ω_α を含む全てのフェルミオン的な場と反可換とする. このとき, dx^μ は BRST 演算子 s と反可換だ. $dx^\kappa dx^\nu dx^\lambda dx^\rho$ は完全反対称だから, それは以下のように書ける.

$$dx^\kappa dx^\nu dx^\lambda dx^\rho = \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} d^4x\,, \qquad d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,. \tag{22.6.14}$$

また外微分,

$$d \equiv dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

も導入する. これは微分が可換なためにベキ零であり, また s と反可換だ.

$$d^2 = 0\,, \qquad ds + sd = 0\,. \tag{22.6.15}$$

最後に, 反可換量,

$$A \equiv iA_\mu dx^\mu = iA_{\alpha\mu}T_\alpha dx^\mu \ , \qquad \omega \equiv i\omega_\alpha T_\alpha \tag{22.6.16}$$

を導入する. この記法では (22.6.13) は,

$$G[\omega, A] = \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left\{\omega\left[(dA)^2 + c_1(dA)A^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + c_2 A(dA)A + c_3 A^2(dA) + c_4 A^4\right]\right\} \tag{22.6.17}$$

となる.

無矛盾条件 (22.6.10) を満たすために, BRST 変換則 (22.6.7) と (22.6.8) は以下のように書けることに着目する.

$$sA = -d\omega + \{A, \omega\} \ , \tag{22.6.18}$$
$$s\omega = \omega^2 \ . \tag{22.6.19}$$

さて, (22.6.17) の最後の項の BRST 変換は,

$$s\mathrm{Tr}\left[\omega A^4\right] = \mathrm{Tr}\left[\omega^2 A^4 - \omega\{A,\omega\}A^3 + \omega A\{A,\omega\}A^2\right.$$
$$\left. -\omega A^2\{A,\omega\}A + \omega A^3\{A,\omega\}\right] + [\omega d\omega A^3 \text{ 項}]$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\omega^2 A^4\right] + [\omega d\omega A^3 \text{ 項}]$$

となる. $\mathrm{Tr}\left[\omega^2 A^4\right]$ に比例する sG への寄与は他に無いから, 無矛盾条件 (22.6.10) は $c_4 = 0$ でのみ満たすことができる. $c_4 = 0$ では, 直接の計算から以下を得る.

$$sG = \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left\{ -(dA)^2\omega^2 + \omega\, d\omega\, A\, dA - d\omega\, \omega\, dA\, A \right.$$
$$-A\omega\, dA\, d\omega - \omega A\, d\omega\, dA$$
$$+c_1\left[\omega\, dA\, d\omega\, A - \omega\, dA\, A\, d\omega\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+c_2\Big[\omega\, d\omega\, dA\, A - \omega A\, dA\, d\omega\Big]\\
&+c_3\Big[\omega\, d\omega\, A\, dA - \omega A\, d\omega\, dA\Big]\\
&-c_1\Big[-\omega A\, d\omega\, A^2 + \omega\, d\omega\, A^3 + \omega\, dA\, A^2\omega\Big]\\
&-c_2\Big[\omega A^2\, d\omega\, A - \omega A\, d\omega\, A^2 + \omega A\, dA\, d\omega\Big]\\
&-c_3\Big[-\omega A^3\, d\omega + \omega A^2\, d\omega\, A + \omega A^2\, dA\,\omega\Big]\Bigg\}\,.
\end{aligned}
$$

被積分関数がゼロとなると仮定する必要はない. それが何らかの局所関数の微分であって, その積分が消えるとするだけでよい. この条件は二つの微分を含む項と, 一つの微分しか含まない項について別々に満たされる必要がある. これは微分の数の異なる項の間では相殺が起こり得ないからだ. 微分を一つだけ含む被積分関数の項は, $c_1 = -c_2 = +c_3 \equiv c$ とすると $d\mathcal{F}$ の形となるのは簡単にわかる. 残りの項はもし $c = -1/2$ なら全微分であり, 前に引用した結果 (22.3.38) となる. この結果は, しばしば, より簡潔に,

$$
\begin{aligned}
G[\omega, A] &= \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left\{\omega\, d\Big[A\, dA - \frac{1}{2}A^3\Big]\right\}\\
&= \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left\{\omega\, d\Big[AF + \frac{1}{2}A^3\Big]\right\}
\end{aligned}
\tag{22.6.20}
$$

と書かれる. ここで F は次の行列値を持つ場の強度の2形式だ.

$$
F \equiv \tfrac{1}{2}\, it_\alpha F_{\alpha\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = dA - A^2\,. \tag{22.6.21}
$$

アノマリーは必ずしも (22.6.13) の形にする必要は無いので, (22.6.20) は $G[\omega, A]$ についての唯一の結果ではない. 次の節に引用する結果によると, G の任意の部分群 H において, H の全ての生成子について

$\mathrm{Tr}\left\{t_i\{t_j, t_k\}\right\} = 0$ ならば, 作用に局所的項を付け加えて t_i が H のどの生成子であってもアノマリー G_i が消えるようにできる.

無矛盾条件の解を構成するには**ストラ・ズミノ降下方程式** (Stora–Zumino descent equation)[18a] として知られるエレガントな代数的方法がある. この方法を任意の偶数次元時空で説明するのは4次元時空でと同じくらい簡単なので, 以下では時空の次元を $2n$ とする. まず, $2n$ 個の時空座標に少なくとも二つの余分な変数を加え, $(2n+2)$ 形式 $\mathrm{Tr}\, F^{n+1}$ が意味を持つと考える. 以下に注意する.

$$dF = -d(A^2) = -(dA)A + A(dA) = [A, F]\,. \qquad (22.6.22)$$

すると, $\mathrm{Tr}\, F^{n+1}$ は閉じている.

$$d\mathrm{Tr}\, F^{n+1} = (n+1)\mathrm{Tr}\,\{(dF)F^n\} = \mathrm{Tr}\,\{[A, F^{n+1}]\} = 0\,. \qquad (22.6.23)$$

拡張した時空が単連結な限り, ポアンカレの定理から $\mathrm{Tr}\,\{F^{n+1}\}$ は完全だ. つまり, $(2n+1)$ 形式 Ω_{2n+1} があって (これはチャーン・サイモンズ形式 (Chern-Simons form) として知られている),

$$\mathrm{Tr}\,\{F^{n+1}\} = d\,\Omega_{2n+1} \qquad (22.6.24)$$

となっている. さらに $\mathrm{Tr}\,\{F^{n+1}\}$ は明白にゲージ不変でゲージ場のみに依存するから, それは BRST 不変だ.

$$s\mathrm{Tr}\,\{F^{n+1}\} = 0\,. \qquad (22.6.25)$$

「微分」dx^μ はゴースト場 ω_α のようなフェルミオン的な場と反可換とするので, 演算子 d は (22.6.7) と (22.6.8) で定義される演算子 s と反可換だ.

$$sd + ds = 0\,.$$

これにより $s\,\Omega_{2n+1}$ もまた閉形式となる.

$$d(s\,\Omega_{2n+1}) = -s\mathrm{Tr}\,\{F^{n+1}\} = 0\,.$$

ポアンカレの定理を再び使うと，これは ω_α について1次の $2n$ 形式 Ω^1_{2n} があり，

$$s\,\Omega_{2n+1} = d\Omega^1_{2n} \tag{22.6.26}$$

となっていることを意味する．さらに s はベキ零だから，$d(s\,\Omega^1_{2n}) = -s^2\Omega_{2n+1} = 0$ により，ゴースト場について2次の $(2n-1)$ 形式 Ω^2_{2n-1} もあり，

$$s\,\Omega^1_{2n} = d\Omega^2_{2n-1} \tag{22.6.27}$$

となっている．したがって，Ω^1_{2n} はそれ自身 BRST 不変でないが，Ω^1_{2n} の $2n$ 次元時空についての積分は BRST 不変だ．

$$s\int_{\text{spacetime}} \Omega^1_{2n} = 0\,. \tag{22.6.28}$$

これより，アノマリー汎関数 $G[\omega, A]$ の候補 $\int\Omega^1_{2n}$ を二つの1次微分方程式，$d\Omega_{2n+1} = \mathrm{Tr}\left\{F^{n+1}\right\}$ と $d\Omega^1_{2n} = s\,\Omega_{2n+1}$ を積分して求めることができる．これらの方程式の一般の解 (唯一の解ではないが) は以下となる．

$$\Omega_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\ \mathrm{Tr}\left\{A\,F_t^n\right\}\,, \tag{22.6.29}$$

$$\Omega^1_{2n} = -(n+1)\int_0^1 dt\,(1-t)\,\mathrm{Tr}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\omega\, d(F_t^r A\, F_t^{n-1-r})\right\}\,. \tag{22.6.30}$$

ここで，$F_t \equiv tF + (t-t^2)A^2$ だ．積分 (22.6.30) を計算すると，(22.6.20) は $G[\omega, A]$ について4次元時空の場合は $\int\Omega^1_4$ に比例する結果を与える．

この降下を続けて，他の有用な結果を導くことができる．とくに，(22.6.27) と s のベキ零性から，$d(s\Omega^2_{2n-1}) = 0$ であり，ポアンカレの定理から $s\Omega^2_{2n-1}$ が $d\Omega^3_{2n-2}$ の形になり，Ω^2_{2n-1} の $2n-1$ 空間座標積分は BRST 不変だとわかる．

$$s\int_{\text{space}} \Omega^2_{2n-1} = 0\,. \tag{22.6.31}$$

そのようなゴースト場について2次の BRST 不変な汎関数[18c]はいわゆる**シュウィンガー項**[18b]の候補となる．ここで関係するようなシュウィンガー項は, 二つの対称性カレントの時間成分の同時刻交換子,

$$\left[J^0_\alpha(\mathbf{x},t),\ J^0_\beta(\mathbf{y},t)\right] = iC_{\alpha\beta\gamma}J^0_\gamma(\mathbf{x},t)\delta^{2n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) \tag{22.6.32}$$

のアノマリー項 $S_{\alpha,\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ として生じる．(この段落の全ての演算子は同時刻 t にとっているので, 今後陽に示さない.) 交換子の反対称性より $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -S_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ だから, $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ についての全ての情報は汎関数,

$$S[\omega] \equiv \int d^{2n-1}x\, d^{2n-1}y\, \omega_\alpha(\mathbf{x})\, \omega_\beta(\mathbf{y})\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{22.6.33}$$

に含まれている．$S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は一般に様々な物質場とゲージ場に依存するから, $S[\omega]$ はゴースト場 $\omega_\alpha(\mathbf{x})$ のみならず一般にこれらの場に依存することに留意しておく．(22.6.32) と第3のカレント $J^0_\gamma(\mathbf{z})$ との交換子をとり, $\omega_\alpha(\mathbf{x})\,\omega_\beta(\mathbf{y})\,\omega_\alpha(\mathbf{z})$ と縮約し, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ について積分し, ヤコビ恒等式を使うと, 以下を得る．

$$\begin{aligned} 0 = \int & d^{2n-1}x\, d^{2n-1}y\, d^{2n-1}z\, \omega_\alpha(\mathbf{x})\, \omega_\beta(\mathbf{y})\, \omega_\gamma(\mathbf{z}) \\ & \times \left[iC_{\alpha\beta\delta}\, S_{\gamma\delta}(\mathbf{z},\mathbf{x})\delta^{2n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + [J^0_\gamma(\mathbf{z}),\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})]\right] . \end{aligned}$$

$S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ のようなゲージ場と物質場の汎関数については, BRST 演算子 s の作用は ω_α をパラメータとするゲージ変換の作用と同じだから,

$$s\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = i\left[\int d^{2n-1}z\, \omega_\gamma(\mathbf{z})\, J^0_\gamma(\mathbf{z}),\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right]$$

となる．(22.6.8) を思い出すと, 汎関数 (22.6.33) が BRST 不変なことがわかる．

$$s\, S[\omega] = 0\, . \tag{22.6.34}$$

また, カレントに項を付け加えて $S[\omega]$ を $sT[\omega]$ の形の項だけ変化させることができるから, カレントに項を加えて取り除くことのできないシュウィンガー項の集合は, BRST 演算子 s のゴースト数2のコホモロジー, つまりゴースト場について2次の BRST 不変汎関数 S でそれ自身 sT の形でないもの, で与えられる. 表式 (22.6.31) は, $\int \Omega^2_{2n-1}$ がそのような汎関数の候補だということを示している.

* * *

この節でここまでに与えたアノマリーの解析は1ループのアノマリーについてのみ厳密に適用できる. 量子ゲージ場が結合するカレントに1ループ・アノマリーがある理論は矛盾しているので, それ以上, 高次を調べる必要はないことは事実だ. しかし, その逆は正しくない. つまり量子ゲージ場の理論が1ループの次数でアノマリーを持たない場合には, 高次でもアノマリーがないことを示す必要がある. また, 量子色力学のカイラル対称性のような大域的対称性にアノマリーを持つ理論には何も矛盾は起きないが, そのような理論でもアノマリーに高次の補正があるかどうか知る必要はある.

BRST 変換は場に非線型に作用するから, アノマリーが無くても量子有効作用 $\Gamma[\omega, A]$ が1ループ近似を超えて BRST 不変と期待する必然性は無い. 17.1節で見たように, この近似を超えるとゲージ場とゴースト場だけでなく, それらの反場も考慮する必要がある. (反場の導入は別の理由で1ループでも重要なことがある. ヴェス・ズミノ無矛盾条件を満たし, 場のみの局所汎関数に BRST 演算子を作用させたものとして書くことのできない場のみの汎関数は, もしそれが場と反場の局所関数と作用との反括弧として表すことができれば, アノマリーの候補とはなれない. これはこの場合には作用からこの項を引いてアノマリーを相殺することができるからだ. これは場の作用と, この作用が従うゲージ対称性の変更に相当する.)

作用に反場を含めてアノマリーを調べると, これがコホモロジー形式で表せることもわかる.[20,21] この問題の解析はバタリン・ビルコビスキーがマスター方程式と呼んだもののジン・ジュスタン版 (17.1.10) にもとづいている. アノマリー が無ければ $(\Gamma, \Gamma) = 0$ だ. これにより, S をゼロ次の作用, Γ_1 を量子有効作用への1ループの寄与として, 1ループの次数で $(S, \Gamma_1) = 0$ となる. アノマリーがあれば, その代りに,

$$(S, \Gamma_1) = G_1 \tag{22.6.35}$$

となる. ここで, G_1 は場と反場のある汎関数で, S と Γ_1 がゴースト数ゼロなので, ゴースト数1だ. 作用は古典的なマスター方程式 $(S, S) = 0$ を満たすと仮定するから, (22.6.35) の反括弧演算はベキ零だ. したがって $(S, G_1) = 0$ となる. しかし, もしゴースト数ゼロのある局所汎関数 F_1 について $G_1 = (S, F_1)$ なら, 作用, したがって Γ_1 から項 F_1 (これは $\hbar$ の次数の量子補正として扱う) を差し引いて, 1ループの次数でアノマリーを相殺することができる. (もちろん $G_1 = (S, \Gamma_1)$ だが, 質量ゼロの粒子があれば Γ_1 は局所汎関数ではない.) したがって, 候補となるアノマリーは, $(S, G_1) = 0$ を満たすという意味で閉形式となっているが, ゴースト数 1 の局所汎関数 F_1 を使って $G_1 = (S, F_1)$ と書くことはできないという意味で完全ではないゴースト数1の局所汎関数 G_1 だ. 言い換えると, 候補となるアノマリーは, 場と反場の局所関数の空間における反括弧演算 $X \mapsto (S, X)$ のゴースト数1のコホモロジーに相当する.

これはまさにこの節の前の方で得た結果で, BRST 演算子 s を反括弧 $(S, \cdots)$ に入れ替えたものだ. もし (22.6.35) で反場をゼロとして, $(\delta\Gamma_1/\delta\chi^n)_{\chi^\ddagger=0} = s\chi^n$ を使うと, 条件 (22.6.35) が実際に条件 $s\Gamma_1 = 0$ を与えることがわかる. これは前に見たように, Γ_1 がヴェス・ズミノ無矛盾条件を満たすという要請と同等だ. しかし, (22.6.35) にもとづいた解析は高次に拡張できるという利点がある.

これを見るために, 反括弧演算 $X \mapsto (S, X)$ がゴースト数1の局所汎関数の空間においてコホモロジーが空であって, 上で述べたように $G_1 = (S, \Gamma_1) = 0$ となるように作用を再定義すると仮定する. 2ループでマスター方程式 $(\Gamma, \Gamma) = 0$ を破るアノマリーは,

$$\Big(\Gamma_1, \Gamma_1\Big) + 2\Big(S, \Gamma_2\Big) = G_2$$

となる関数 G_2 で表される. しかし, $(S, \Gamma_1) = 0$ で $(S, S) = 0$ だから, そのような任意の G_2 は $(S, G_2) = 0$ を満たすはずだ. これは, コホモロジーが空だという仮定によれば$G_2 = (S, F_2)$ と表せることを意味する. ここで, F_2 はゴースト数0の局所汎関数だ. したがって, この次数ではアノマリーは F_2 を作用から差し引くことで相殺できる.

この議論は全次数に拡張できる. マスター方程式でアノマリーを $N-1$ 次まで相殺し,

$$0 = G_M = \sum_{L=0}^{M} \Big(\Gamma_L, \Gamma_{M-L}\Big) = 2\Big(S, \Gamma_M\Big) + \sum_{L=1}^{M-1} \Big(\Gamma_L, \Gamma_{M-L}\Big)$$

が全ての $M < N$ で成り立っているとしよう. 反括弧 (Γ, Γ) の N 次の項は同様に,

$$G_N = 2\Big(S, \Gamma_N\Big) + \sum_{M=1}^{N-1} \Big(\Gamma_M, \Gamma_{N-M}\Big)$$

だから, ヤコビ恒等式 (15.9.21) (ボゾン演算子三つの場合については全ての符号は $-$) と (S, Γ_M) についての上の表式を使うと,

$$\begin{aligned}\Big(S, G_N\Big) &= -2 \sum_{M=1}^{N-1} \Big(\Big(S, \Gamma_M\Big), \Gamma_{N-M}\Big) \\ &= \sum_{M=1}^{N-1} \sum_{L=1}^{M-1} \Big(\Big(\Gamma_L, \Gamma_{M-L}\Big), \Gamma_{N-M}\Big)\end{aligned}$$

を得る. これはより対称な形に書きかえることができる.

$$\left(S, G_N\right) = -\sum_{M_1=1}^{N-2} \sum_{M_2=1}^{N-2} \sum_{M_3=1}^{N-2} \delta_{N, M_1+M_2+M_3} \left(\Gamma_{M_1}, \left(\Gamma_{M_2}, \Gamma_{M_3}\right)\right) .$$

M_1, M_2, M_3 の範囲は同じだから, この和の2重反括弧をこれらの添字の 3! 個の置換についての和と書くことができ, これはヤコビ恒等式 (15.9.21) によりゼロとなるから, $(S, G_N) = 0$ という結論に達する. 仮定したようにコホモロジーが空ならば, $G_N = (S, F_N)$ となる局所汎関数 F_N が存在することになるから, F_N を作用から差し引くことでアノマリーが N 次で相殺される. これが証明したいことだった.

純粋に代数的な方法を用いて, バーニッヒ (Barnich), ブラント (Brandt), ヘネー (Henneaux)[22] は半単純ゲージ群の (4次元時空での) ヤン・ミルズ理論では反括弧演算 $X \mapsto (S, X)$ のコホモロジーは, (ゴースト数1の局所汎関数の空間において) ゲージ群の各単純部分群に一つずつの (22.6.20) の形の項の線形結合からのみなることを証明した.[††] この線形結合の係数は未知だ. これにより, 理論の物質の内容に全く依らず, 1ループの次数で, アノマリー G_1 が自動的に $(S, G_1) = 0$ を満たすときは, 半単純ゲージ群のアノマリーは (22.6.20) の形の項の線形結合でなければならないことがわかる. その各単純群の定数係数は理論の物質の内容を考慮した詳細な計算で決定される. さらに, 22.4節では, (22.6.20) のトレースがどのようなフェルミオン場についても自動的にゼロとなるようなゲージ群が存在することを見た. (それらは $n \geq 3$ の $SU(n)$ 群を因子として持たない半単純ゲージ群だ.) そのような場合には, 文献22の定理により反括弧演算 $X \mapsto (S, X)$ のゴースト数1のコホモロジーは空だ. すでに見たように, これはそのような理論では摂動論の任意の次数でアノマリーが存在しないこと

[††](22.6.20) のトレースを計算するゲージ代数の表現を特定する必要は無い. これは, このトレースは単純リー代数の全ての表現について定数係数を除いては同じ[19a]であり, 定数係数はこのコホモロジー定理ではいずれにしろ決まらないからだ.

を意味する.

別の意味でも, アノマリーは反括弧演算のコホモロジーに関係する.[23] スラブノフ・テイラー恒等式 (16.4.6) を導く際には, 測度 $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ は問題の対称性変換のもとで不変だと仮定した. 15.9 節では対称性変換 $\chi^n \to \chi^n + \theta\delta S/\delta\chi^\ddagger_n$ のスラブノフ・テイラー恒等式からジン・ジュスタン方程式を導いたから, 15.9 節で与えたジン・ジュスタン方程式は $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ がこの変換のもとで不変でなければ, 言い換えると Δ を (15.9.34) の演算子として $\Delta S = 0$ でなければ, 成立しない. $\Delta S \neq 0$ のときでもジン・ジュスタン方程式を救うことは可能だ. これには局所汎関数を S に加えて古典的マスター方程式 $(S, S) = 0$ を破り, 測度の非不変性の影響を消すようにすればよい. この相殺が起こる条件は量子マスター方程式 (15.9.35) そのものだということがわかる. この方程式を満たす作用 S を構成するには, 古典的マスター方程式 $(S_0, S_0) = 0$ を満たすゼロ次の作用 S_0 から出発し, 量子補正を加える. 演算 $X \to (S_0, X)$ のコホモロジー(局所汎関数空間でゴースト数 1 において) が空なときには, この場合にアノマリーが全ての次数で無いことの上での証明を使って, S_0 に局所汎関数を加えて量子マスター方程式が全次数で満たされることを証明できる.

22.7 アノマリーとゴールドストン・ボゾン

無矛盾条件を導入した 1971 年の論文[18] でヴェスとズミノはまた, アノマリーの可能性はゴールドストン・ボゾンの相互作用についても重要な性質を導くと論じた. かれらの論点を理解するには, ト・フーフト[16] が 1979 年に導いた「アノマリー一致」(anomaly matching) の議論を当てはめるとよい. これはすでに 22.5 節で使った.

閉じ込められた質量ゼロのフェルミオンを持つある基本理論で線形に実現されていて, 破れている大域的対称性群 G を考える. その例と

しては3種の質量ゼロのクォークを持つ量子色力学の大域的カイラル対称性 $SU(3) \times SU(3)$ がある. この基本理論に架空のゲージ場を導入し, 可能なアノマリーを除いては大域的対称性 G が局所的になるようにする. 一般にこの局所対称性はアノマリーで破られるだろう. これは現実の世界ではこの対称性は純粋に大域的であり, 大域的対称性は必ずしもアノマリーを持たない局所対称性に拡張できなくてもよいからだ. しかし, これらのアノマリーは適切な質量ゼロの傍観フェルミオンを加えて消去することができる. このように導入したゲージ結合が十分小さく, 傍観フェルミオンがこの非常に弱いゲージ相互作用のみを持つ限り, これらの変更により理論のダイナミクスはあまり変わることは無いはずだ.

次に, 閉じ込められたフェルミオンが観測されないほどの低いエネルギーでの物理を記述する有効場の理論を考える. この理論の自由度は質量ゼロの粒子, つまり架空のゲージ・ボゾンと傍観フェルミオン, ゴールドストトン・ボゾンの集合のみだ. このゴールドストン・ボゾンは破れた対称性の独立なものについて一つずつあり, その場を ξ_a と書く. 基本理論はゲージ不変でアノマリーが無いようにしたから, 同じことが有効場の理論でも成り立たなければならない. しかし傍観フェルミオンは基本理論の閉じ込められたフェルミオンのアノマリーを相殺するだけのアノマリーを生じていた. したがって, それらがゴールドストン・ボゾンによるアノマリーを相殺するには, ゴールドストン・ボゾンの有効ゲージ理論は, 基本理論の閉じ込められたフェルミオンが生じるアノマリーに等しい架空的な局所対称性のアノマリーを持たなければならない. つまり, (22.6.2) の代りに, 架空のゲージ場とゴールドストン・ボゾンの有効作用 $\Gamma[\xi, A]$ は以下の条件を満たさなければならない.

$$\mathcal{T}_\beta(x)\Gamma[\xi, A] = G_\beta[x; A] . \tag{22.7.1}$$

ここで $G_\beta[x;A]$ は基本理論のアノマリー関数であり, これにはゴールドストン・ボゾンは含まれていない. また, $\mathcal{T}_\beta$ はいまゲージ場とゴールドストン・ボゾン場の両方に作用するゲージ群 G の生成子だ. ($\mathcal{T}_\beta$ の添字 β は, 破れていない対称性部分群 H の独立な生成子 $\mathcal{Y}_i$ の集合の添字 i と, 破れた対称性の生成子 $\mathcal{X}_a$ の添字 a の値をとる. 各 $\mathcal{X}_a$ について一つゴールドストン・ボゾン ξ_a が存在する.)

もちろん (22.7.1) は, 現実の弱く結合するゲージ場とゴールドストン・ボゾンの相互作用を調べるのにも使える. たとえば, 基本理論がクォークに結合した電弱ゲージ場を含む場合には, 「架空の」ゲージ場と呼んだものを電弱ゲージ場とする. そのような場合には「傍観」フェルミオンも実際に存在して, 閉じ込められたフェルミオンのループによって生じる現実の弱く結合したゲージ場のゲージ対称性のアノマリーを相殺しなければならない. これは, たとえばレプトンがクォークによって生じる電弱アノマリーを相殺することに相当する.

さて, (22.7.1) から得られる結論を論じよう. この目的のためにゲージ対称性の生成子 $\mathcal{T}_\beta(x)$ を計算するには, 一般の群の変換 $g = \exp(-i\int \zeta_\beta(x)\mathcal{T}_\beta(x)\,d^4x\,)$ のもとでゴールドストン・ボゾン場 $\xi_a(x)$ は (19.6.18) によって与えられる場 $\xi'_a(x)$ に変換され, ゲージ場 $A^\mu_\beta(x)$ はゲージ変換された場 $A'^\mu_\beta(x)$ に変換されることに注意する. これにより,

$$\mathcal{T}_\beta(x) = \mathcal{T}^A_\beta(x) + \mathcal{T}^\xi_\beta(x) \qquad (22.7.2)$$

となる. ここで $\mathcal{T}^A_\beta(x)$ はゲージ場に働き, (22.6.1) で与えられる.

$$-\,i\mathcal{T}^A_\beta(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta A_{\beta\mu}(x)} - C_{\beta\gamma\alpha}A_{\gamma\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)}\,. \qquad (22.7.3)$$

ここで $C_{\alpha\beta\gamma}$ はゲージ群 G の完全反対称構造定数だ. また, $\mathcal{T}^\xi_\beta(x)$ はゴールドストン・ボゾン場に作用し, (19.6.17) の微小極限で与えられる. これは ($\gamma(\xi) = \exp(i\xi_a X_a)$ の指数パラメータ表示では) 以下とな

る.*

$$T_\beta \exp(i\xi_a(x)X_a) = -\mathcal{T}^\xi_\beta(x)\exp(i\xi_a(x)X_a) + \exp(i\xi_a(x)X_a)\,\theta_{\beta i}(x)Y_i\ . \tag{22.7.4}$$

ここで T_β は任意の表現で G の生成子を表す行列だ. それらは, それぞれ破れた対称性と破れない対称性の生成子を表す X_a と Y_i の集合に分けられる. また, $\theta_{\beta,i}(x)$ は ξ に依存しない関数で, その形はいま問題とならない.

アノマリー関数 $G_\beta[x;A]$ については無矛盾条件 (22.6.6),

$$\mathcal{T}_\alpha(x)G_\beta[y;A] - \mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x;A] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[y;A] \tag{22.7.5}$$

と破れていない対称性にアノマリーが無いこと,

$$G_i[x;A] = 0 \tag{22.7.6}$$

のみを仮定する. 前の節で述べたように, 破れていない対称性部分群の生成子についてトレース $\mathrm{Tr}\,[T_i\{T_j,T_k\}]$ がゼロとなる ($SU(3)\times SU(3)$ のカイラルでない生成子についてはそうなっている) かぎり, 作用に局所汎関数を加えて (22.7.6) が満たされるようにすることが常に可能だ.

(22.7.5) と (22.7.6) の仮定のもとでは, アノマリーを持つスラブノフ・テイラー恒等式 (22.7.1) の解を見つけることが常に可能だ.

$$\Gamma[\xi, A] = -i\int_0^1 dt \int \xi_b(y)\, G_b[y; A_{-t\xi}]\, d^4y\ . \tag{22.7.7}$$

ここで $[A_{-t\xi}(x)]_\mu$ は $A_\mu \equiv T_\beta A_{\mu\beta}$ に $\Lambda_a = -t\xi_a$ と $\Lambda_i = 0$ のゲージ変換 (15.1.17) を働かせた結果だ.

$$[A_{-t\xi}(x)]_\mu = \exp(-itX_a\xi_a(x))\, A_\mu(x)\exp(itX_a\xi_a(x))$$

---

*(22.7.4) の右辺第 1 項のマイナス符号と (22.7.3) 左辺の因子 $-i$ は, ゲージパラメータ Λ_β のゲージ変換 (15.1.17) を引き起こすのが $\exp[-i\int \Lambda_\beta(x)\mathcal{T}_\beta(x)]$ であるために生じる. これは, $\mathcal{T}_\beta(x)$ が交換関係 (22.6.5) を満たすという要請からわかる.

$$-i\Big[\partial_\mu \exp\left(-itX_a\xi_a(x)\right)\Big] \exp\left(itX_a\xi_a(x)\right) \ . \tag{22.7.8}$$

破れていない対称性がアノマリーを持つ場合とは対称的に, (22.7.7) と (22.7.8) はゲージ場とゴールドストン・ボゾン場の(複雑ではあるが) 局所的な汎関数を定義する. (22.7.1) の他の解はどれも, この解とはアノマリーを持たない汎関数の分だけ異なる.

作用 (22.7.7) が (22.7.1) を満たす証明[24] の概略はこうだ. 局所的な生成子 $\mathcal{T}_\beta(x)$ を使う代りに, 任意の関数 $\eta_\beta(x)$ を導入して,

$$\mathcal{T}[\eta] = \int d^4x\ \eta_\beta(x)\mathcal{T}_\beta(x) \tag{22.7.9}$$

と定義する. $\mathcal{T}[\eta]\xi_b(x)$ を計算するには, 行列,

$$\begin{aligned}\eta_{-t\xi}(x) &\equiv \exp\Big(-iX_a\xi_a(x)t\Big)\Big[\eta(x)+\mathcal{T}[\eta]\Big]\exp\Big(iX_a\xi_a(x)t\Big)\\ &\equiv [\eta_{-t\xi}(x)]_\beta T_\beta\end{aligned} \tag{22.7.10}$$

を導入する. ここで $\eta(x)\equiv\eta_\beta(x)T_\beta$ だ. すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_{-t\xi}(x) = -i\Big[X_a\xi_a(x), \eta_{-t\xi}(x)\Big] + i\Big(\mathcal{T}[\eta]\xi_a(x)\Big)X_a$$

となるから, 以下を得る.

$$\mathcal{T}[\eta]\xi_b(x) = -i\frac{\partial}{\partial t}[\eta_{-t\xi}(x)]_b + iC_{a\gamma b}\,\xi_a(x)\,[\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma \ . \tag{22.7.11}$$

$\mathcal{T}[\eta]G_b[y,A]$ を求めるには, ゲージ場に $\mathcal{T}[\eta]$ を作用させ, 直接の計算をして,

$$\mathcal{T}[\eta][A_{-t\xi}(x)]_\mu = \Big(\mathcal{T}^A[\eta_{-t\xi}]A_\mu(x)\Big)_{A\to A_{-t\xi}} \tag{22.7.12}$$

を得る. そこで無矛盾条件 (22.7.5) を使うと以下を得る.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\eta]G_b[y;A_{-t\xi}] &= \int d^4x\ [\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma\Big(\mathcal{T}^A_\gamma(x)\,G_b[y;A]\Big)_{A\to A_{-t\xi}}\\ &= \int d^4x\ [\eta_{-t\xi}(x)]_a\Big(\mathcal{T}^A_b(y)\,G_a[x;A]\Big)_{A\to A_{-t\xi}}\\ &\quad +iC_{\gamma ba}\,[\eta_{-t\xi}(y)]_\gamma G_a[y;A_{-t\xi}]\ .\end{aligned} \tag{22.7.13}$$

(22.7.11) と (22.7.13) の構造定数の項は相殺するので,

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int_0^1 dt \int d^4y \left\{ -\left[\frac{\partial}{\partial t}[\eta_{-t\xi}(y)]_b\right] G_b[y; A_{-t\xi}] \right.$$
$$\left. -i[\eta_{-t\xi}(y)]_a \Big(\mathcal{T}[\xi]\, G_a[y; A]\Big)_{A\to A_{-t\xi}} \right\} \qquad (22.7.14)$$

となる. また率直な計算により,

$$\frac{\partial}{\partial t}[A_{-t\xi}(x)]_\mu = i\Big(\mathcal{T}^A(\xi) A_\mu(x)\Big)_{A\to A_{-t\xi}} \qquad (22.7.15)$$

を示すことができる. したがって, (22.7.14) の被積分関数の項を足しあげると, t 微分になり,

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = -\int_0^1 dt \int d^4y\, \frac{\partial}{\partial t}\Big\{ [\eta_{-t\xi}(y)]_b\, G_b[y; A_{-t\xi}] \Big\}$$
$$= -\int d^4y \Big[[\eta_{-t\xi}(y)]_b\, G_b[y; A_{-t\xi}] \Big]_{t=0}^{t=1} \qquad (22.7.16)$$

となる. $t = 1$ では

$$\eta_{-\xi}(x) = \exp\Big(-iX_a\xi_a(x)\Big)\Big[\eta(x) + \mathcal{T}[\eta]\Big]\exp\Big(iX_a\xi_a(x)\Big)$$

だ. (22.7.4) からこれは破れていない対称性部分群 H の生成子の線形結合だとわかるので, 任意の破れた対称性の生成子 X_b の係数 $[\eta_{-\xi}(y)]_b$ はゼロとなることがわかる. また, (22.7.10) と (22.7.8) からすぐに $t = 0$ では $\eta_{-t\xi}(y) = \eta(y)$ と $[A_{-t\xi}(y)]_\mu = A_\mu(y)$ となる. したがって, (22.7.16) から以下を得る.

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int d^4y\, [\eta_0(y)]_b\, G_b[y; A_0] = \int d^4y\, \eta_b(y)\, G_b[y; A]\,. \qquad (22.7.17)$$

これと (22.7.6) は望むべき結果 (22.7.1) に同等だ. これで証明が完成した.

(22.7.1) の解 (22.7.7) は唯一の解ではない. しかしこれは $\xi = 0$ でゼロとなるものとしては唯一の解だ. これを見るには,

$$\exp\left[-i\int \eta_\beta(x)\,\mathcal{T}_\beta(x)\,d^4x\right]\Gamma[\xi, A] = \Gamma[\xi', A'] \tag{22.7.18}$$

に注意する. ここで, プライム (′) は変換パラメータ η_β のゲージ変換を意味する. この指数関数を,

$$\exp(z) = 1 + \int_0^1 dt\,\exp(zt)\,z$$

と表すと便利だ. こうすると (22.7.1) と (22.7.18) は以下を与える.

$$\Gamma[\xi, A] - i\int_0^1 dt\,\exp\left[-it\int \eta_\beta(x)\mathcal{T}^A_\beta(x)\,d^4x\right]\int \eta_b(y)G_b[y;A]d^4y$$
$$= \Gamma[\xi', A'] \,. \tag{22.7.19}$$

特に, もし $\eta_a = -\xi_a$ と $\eta_i = 0$ とすると, $\xi'_a = 0$ となり, この場合は仮定により (22.7.19) の右辺はゼロとなる. したがって, 以下の表式を得る.

$$\Gamma[\xi, A] = -i\int_0^1 dt\,\exp\left[it\int \xi_a(x)\mathcal{T}^A_a(x)\,d^4x\right]\int \xi_b(y)G_b[y;A]\,d^4y \,. \tag{22.7.20}$$

(22.7.20) の汎関数演算子 $\exp[it\int \xi_a(x)\mathcal{T}^A_a(x)\,d^4x]$ は単にゲージ・パラメータ $\Lambda_\beta(x) = -t\xi_a(x)$ のゲージ変換 (15.1.17) を行うだけだから, (22.7.20) は (22.7.7) のように書くことができる.

(22.7.7) は擬スカラーのゴールドストン・ボゾン8重項の電弱相互作用を調べるのに使うことができる. しかし, ゲージ場が実際に無くても, ゴールドストン・ボゾン自身の相互作用について重要な結論を導くことができる. $A = 0$ の場合には (22.7.8) は「純ゲージ」場となる.

$$[A_{-t\xi}(x)]_\mu = -i\Big[\partial_\mu \exp\left(-itX_a\xi_a(x)\right)\Big]\exp\left(itX_a\xi_a(x)\right)$$
$$= -i\Big[\partial_\mu V\Big(t\xi(x)\Big)\Big]\,V^{-1}\Big(t\xi(x)\Big) \,. \tag{22.7.21}$$

ここで,

$$V\Big(t\xi(x)\Big) \equiv \exp\Big(-itX_a\xi_a(x)\Big) \tag{22.7.22}$$

だ. $A^\mu_\alpha(x) = 0$ では, (22.7.1) は以下を与える.

$$\mathcal{T}_\beta(x)\Gamma[\xi, 0] = 0\,. \tag{22.7.23}$$

したがって, (22.7.21) を (22.7.7) に使うと, ゴールドストン・ボゾン場 $\xi_a(x)$ の G 不変な局所汎関数を得る. ただ, 後で見るように, それは一般には $\xi_a(x)$ とその微分の G 不変な関数の時空座標についての積分ではない.

最も単純な例は対称性が完全に破れている場合だ. この場合は条件 (22.7.6) は空で, アノマリーの対称形 (22.3.38) を使える.

$$\begin{aligned} G_a[x; A] = \frac{i}{24\pi^2}\,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\Bigg\{T_a\Big[&\partial_\kappa A_\nu(x)\,\partial_\lambda A_\rho(x) \\ &-\tfrac{1}{2}i\partial_\kappa A_\nu(x)\,A_\lambda(x)A_\rho(x) + \tfrac{1}{2}iA_\kappa(x)\,\partial_\nu A_\lambda(x)\,A_\rho(x) \\ &-\tfrac{1}{2}iA_\kappa(x)A_\nu(x)\partial_\lambda A_\rho(x)\Big]\Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{22.7.24}$$

ここで, T_a は理論の左手フェルミオン (その差が有意なときには, 反フェルミオンも含む) によって与えられる群の生成子の特定の表現だ. この場合には (22.7.24) に (22.7.21) を使って, (22.7.24) のトレース内の項で $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ と縮約をとっても生き残る唯一の項は, 全て以下に比例することがわかる.

$$\mathrm{Tr}\left\{T_a(\partial_\kappa V)V^{-1}(\partial_\nu V)V^{-1}(\partial_\lambda V)V^{-1}(\partial_\rho V)V^{-1}\right\}\,.$$

また, その係数はそれぞれ, -1, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ だ. したがって (22.7.7) は以下となる.

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{48\pi^2}\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\int d^4y\;\xi_a(y)\int_0^1 dt\;\mathrm{Tr}\Bigg\{T_a\left[\partial_\kappa V\Big(t\xi(y)\Big)\right]$$

$$\times V^{-1}\Big(t\xi(y)\Big)\left[\partial_\nu V\Big(t\xi(y)\Big)\right]V^{-1}\Big(t\xi(y)\Big)\left[\partial_\lambda V\Big(t\xi(y)\Big)\right]$$
$$\times V^{-1}\Big(t\xi(y)\Big)\left[\partial_\rho V\Big(t\xi(y)\Big)\right]V^{-1}\Big(t\xi(y)\Big)\Bigg\}\,. \qquad (22.7.25)$$

約束したように, これは場と場の微分の不変関数の積分ではない. たとえば, ゴールドストン・ボゾン場が弱いとき (22.7.25) は,

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{1}{240\pi^2}\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\,\{T_aT_bT_cT_dT_e\}\int d^4y\;\xi_a\,\partial_\kappa\xi_b\,\partial_\nu\xi_c\,\partial_\lambda\xi_d\,\partial_\rho\xi_e$$
$$+O(\xi^6) \qquad (22.7.26)$$

となる. ゴールドストン・ボゾン場の共変微分の任意の関数の場について最低次の項は, 単にゴールドストン場の偏微分の積だから, (22.7.26) の形の最低次の項を持てない.

実用上さらに重要な場合として, 質量ゼロの u, d, s クォークを持つ量子色力学の $SU(3)\times SU(3)$ カイラル対称性が, ゲルマン・ネーマンの対角 $SU(3)$ 部分群に自発的に破れる例を考える. この節の結果を利用するために, フェルミオンのループ積分の運動量を, 対角 $SU(3)$ 部分群のベクトル・カレントがアノマリーを持たないように扱わなければならない. そうすると, アノマリーはバーディーン形 (22.3.34) となる.

$$G_a[V,A] = \frac{in}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left\{t_a\Big[V_{\mu\nu}V_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{3}A_{\mu\nu}A_{\rho\sigma} - \tfrac{32}{3}A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma\right.$$
$$\left.+\tfrac{8}{3}i(A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma} + A_\mu V_{\rho\sigma}A_\nu + V_{\rho\sigma}A_\mu A_\nu)\Big]\right\}. \qquad (22.7.27)$$

ここで, V_μ, A_μ, $V_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ は (22.3.35)–(22.3.37) で定義される. また, t_a はここでは (19.7.2) で定義されるゲルマン行列 λ_a の半分だ. そして, n は各フレーバーのクォークの種類 (「色」) の数だ. (ここでは群の生成子を表す行列に小文字の t を使っている. これはこのトレースでは左手クォークについてのみ和をとり, 左手反クォークについては

和をとらないからだ.) (22.7.21) のような純ゲージ場については, 場の強度 $V_{\mu\nu}$ と $A_{\mu\nu}$ はゼロとなるから, (22.7.27) を (22.7.7) に使うと, 以下のアノマリーを持った有効ゴールドストン・ボゾン作用を得る.

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{2n}{3\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\int_0^1 dt\int d^4x \times \mathrm{Tr}\left\{\xi_a t_a[A_{-t\xi}]_\mu[A_{-t\xi}]_\nu[A_{-t\xi}]_\rho[A_{-t\xi}]_\sigma\right\}. \quad (22.7.28)$$

ここで「A」はベクトル・ゲージ場ではなく軸性ベクトル・ゲージ場を意味する. $[A_{-t\xi}]_\mu$ を見つけるためには, (22.7.21) を以下のように書く.

$$[V_{-t\xi}(x)]_\mu + \gamma_5[A_{-t\xi}(x)]_\mu = -i\Big[\partial_\mu \exp\Big(-it\gamma_5 t_a\xi_a(x)\Big)\Big] \times \exp\Big(it\gamma_5 t_a\xi_a(x)\Big). \quad (22.7.29)$$

$(1+\gamma_5)/2$ と $(1-\gamma_5)/2$ をかけ, 差をとると軸性ベクトルの項,

$$\begin{aligned}[A_{-t\xi}(x)]_\mu &= -\tfrac{1}{2}i\Big[\partial_\mu \exp\Big(-it\xi_a t_a\Big)\Big]\exp\Big(it\xi_a t_a\Big) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}i\Big[\partial_\mu \exp\Big(it\xi_a t_a\Big)\Big]\exp\Big(-it\xi_a t_a\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}i\exp\Big(it\xi_a t_a\Big)U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_\mu U\Big(t\xi(x)\Big)\Big] \\ &\quad \times \exp\Big(-it\xi_a t_a\Big) \end{aligned} \quad (22.7.30)$$

を得る. ここで,

$$U\Big(t\xi\Big) \equiv \exp\Big(2it_a\xi_a t\Big) \quad (22.7.31)$$

だ. これを (22.7.28) に使うと以下のアノマリーを持った有効作用を得る.

$$\begin{aligned}\Gamma[\xi,0] = -\frac{n}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\int_0^1 dt\int d^4x\, \mathrm{Tr}\Big\{&\xi_a t_a U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_\mu U\Big(t\xi(x)\Big)\Big] \\ &\times U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_\nu U\Big(t\xi(x)\Big)\Big]U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_\rho U\Big(t\xi(x)\Big)\Big] \\ &\times U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_\sigma U\Big(t\xi(x)\Big)\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad (22.7.32)$$

ウィッテン[25]が述べたように，これは便利な5次元形に表すことができる．t を5番目の座標として，$\xi_a(x,t) \equiv t\xi_a(x)$ と定義する．すると，(22.7.32) は以下となる．

$$\begin{aligned}\Gamma[\xi,0] = -\frac{in}{240\pi^2}\epsilon^{ijklm}\int d^5z\ \mathrm{Tr}\Big\{&U^{-1}\Big(\xi(z)\Big)\Big[\partial_i U\Big(\xi(z)\Big)\Big] \\ &\times U^{-1}\Big(\xi(z)\Big)\Big[\partial_j U\Big(\xi(z)\Big)\Big]U^{-1}\Big(\xi(z)\Big)\Big[\partial_k U\Big(\xi(z)\Big)\Big] \\ &\times U^{-1}\Big(\xi(z)\Big)\Big[\partial_l U\Big(\xi(z)\Big)\Big]U^{-1}\Big(\xi(z)\Big)\Big[\partial_m U\Big(\xi(z)\Big)\Big]\Big\}\,.\end{aligned} \tag{22.7.33}$$

ここで i, j, 等は 1, 2, 3, 0, 5, の値をとる．$i = 1, 2, 3, 0$ について $z^i = x^i$ で，$z^5 = t$ だ．また，積分は $0 \leq z^5 \leq 1$ の領域についてする．((22.7.33) においては，5つの添字 i, j, k, l, m のどれでもが5の値をとる可能性があることを勘定に入れて，余分な因子 1/5 を入れてある.) $z^5 = 0$ においては，他の z^i のどの成分 z^μ の値によらず $\xi_a(z)$ は固定値ゼロとなるので，これらの z^i の値を一つの点に同定して，(22.7.33) の積分領域を5次元球体と考えることができる．その4次元境界 $z^5 = 1$ は通常の時空だ．このようにして (22.7.33) は (19.8.1) と (19.8.3) で与えられる「ヴェス・ズミノ・ウィッテン」作用の特別な場合となる．これはやはり整数 n に比例する．唯一の違いは，n はここでは色の数と特定されていることだ．19.8節では積分 (19.8.3) が5次元球体の時空境界での $\xi_a(z)$ の値のみに依存することを見た．したがって，(22.7.33) を導く際に (19.8.2) は $\xi_a(x,t) = t\xi(x)$ のみならず $\xi_a(x)$ の5次元球体の内部への任意の接続について当てはまることを示した．

* * *

より一般的に，任意のゲージ群 G がそれ自身はアノマリーを持たな

い部分群 H に自発的に破れることを考える．つまり, D 記号 (22.3.12) が H のどの3つの生成子についてもゼロだとする．チュー(Chu)・ホー(Ho)・ズミノ[26]は, 破れた対称性のゲージ場を考慮に入れても部分群 H のカレントがアノマリーを持たないように, 作用に局所汎関数 $B[A]$ を加えることができることを示した．この汎関数は以下で与えられる．

$$B[A]=\frac{1}{48\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\Big\{[A_h^\mu,A^\nu](F^{\rho\sigma}+F_h^{\rho\sigma})+A^\mu A_h^\nu A_h^\rho A_h^\sigma$$
$$-A_h^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma+\frac{1}{2}A_h^\mu A^\nu A_h^\rho A^\sigma\Big\}\,. \tag{22.7.34}$$

ここで, 以前と同様 $A^\mu\equiv T_\alpha A_\alpha^\mu$ と $F^{\mu\nu}\equiv T_\alpha F_\alpha^{\mu\nu}$ だ．また, $A_h^\mu\equiv T_iA_i^\mu$ と $F_h^{\mu\nu}\equiv T_iF_i^{\mu\nu}$ は A^μ と $F^{\mu\nu}$ の破れていない対称性部分群 H の代数の項だ．すると, 全アノマリーは,

$$G'_\beta[x;A]=G_\beta[x;A]+\mathcal{T}_\beta(x)B[A] \tag{22.7.35}$$

となる (ここで, $G_\beta[x;A]$ は (22.3.38) の対称化されたアノマリー)．これは望むべき条件,

$$G'_i[x;A]=0 \tag{22.7.36}$$

を満たす．ゴールドストン・ボゾン場とゲージ場の有効作用のアノマリーを持つ部分は, (22.7.7) の G_β の代りに (22.7.35) を使って得られる．このようにしてチュー達[26]は以下のアノマリーを持つ有効作用を見つけた．

$$\Gamma'[\xi,A]=\Gamma[\xi,A]-B[A_{-\xi}]+B[A]\,. \tag{22.7.37}$$

ここで $\Gamma[\xi,A]$ は前に導いた有効作用 (22.7.7) であり, $A_{-\xi}(x)$ は (22.7.8) で $t=1$ として得られる．特にゲージ場がゼロとなるときには $A_{-\xi}$ は純ゲージ場だ．

$$[A_{-\xi}(x)]_\mu=-i\Big[\partial_\mu V\Big(\xi(x)\Big)\Big]V^{-1}\Big(\xi(x)\Big)\,,$$
$$V\Big(\xi(x)\Big)=\exp\Big(-iX_a\xi_a(x)\Big)\,.$$

したがって, ゴールドストン・ボゾン作用は,

$$\Gamma'[\xi,0]=\Gamma[\xi,0]-\frac{1}{48\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left\{A^{\mu}_{-\xi}\,A^{\nu}_{-\xi\ h}\,A^{\rho}_{-\xi\ h}\,A^{\sigma}_{-\xi\ h}\right.$$
$$\left.-A^{\mu}_{-\xi\ h}\,A^{\nu}_{-\xi}\,A^{\rho}_{-\xi}\,A^{\sigma}_{-\xi}+\frac{1}{2}A^{\mu}_{-\xi\ h}\,A^{\nu}_{-\xi}\,A^{\rho}_{-\xi\ h}\,A^{\sigma}_{-\xi}\right\} \tag{22.7.38}$$

となる. この結果は唯一のものではない. 特に, 量子色力学のようにパリティが保存される理論では, 有効作用に局所的な項を付加して, (22.7.38) のどんなパリティ非保存項も相殺することができる.

問題

1. $\eta\to\gamma+\gamma$ の崩壊について $m_u=m_d=0$ のときに, m_s について主要な項を計算せよ.

2. フェルミオン数を保存する理論において, カイラル $SU(3)$ 対称性のもとでスピン $\frac{1}{2}$ の場の左手成分が $SU(3)$ の N 個の基本表現 **3** であり, 右手成分は全て一重項となっているとする. このとき, $SU(3)$ 対称性のアノマリーを計算せよ. 左手成分が一重項で右手成分が $SU(3)$ のトレースゼロの対称2階テンソルとなっている M 個のフェルミオン場を加えると, アノマリーはどうなるか?

3. $n=4$ 個のフレーバーがあるときのト・フーフトのアノマリー一致条件 (22.5.5) と (22.5.6) の解を見つけよ. また, $n=2$ のときに, 本文に与えられたものと異なる解を見つけよ.

4. $\Delta S=0$ と仮定せずに量子マスター方程式からジン・ジュスタン方程式を導け.

参考文献

1. J. Steinberger, *Phys. Rev.* **76**, 1180 (1949); また, 以下の文献も見よ. R. J. Finkelstein, *Phys. Rev.* **72**, 415 (1949); H. Fukuda and Y. Miyamoto, *Prog. Theor. Phys.* **4**, 347 (1949); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951); L. Rosenberg, *Phys. Rev.* **129**, 2786 (1963). この崩壊率の大雑把な計算は, π^0 中間子の実験的発見以前に, S. Sakata and Y. Tanikawa, *Phys. Rev.* **57**, 548 (1940) で与えられた.

2. D. G. Sutherland, *Nucl. Phys.* **B2, 433** (1967).

3. M. Veltman, *Proc. Roy. Soc.* **A301**, 107 (1967).

4. J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1969). また, 以下の文献も見よ. R. Jackiw, *Lectures on Current Algebra and its Applications*, (Princeton Press, Princeton, 1972).

5. S. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969). また, S. Adler, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory – 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton 編 (MIT Press, Cambridge, MA, 1970): Volume I も見よ.

6. K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979).

6*a*. M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **81**, 2597 (1984).

7. L. Alvarez-Gaumè and P. Ginsparg, *Ann. Phys.* **161**, 423 (1985).

7*a*. より詳しい議論は, Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, *Nucl. Phys.* **B177**, 157 (1981) にある.

8. W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969).

8*a*. たとえば, B. Zumino, Y–S. Wu, and A. Zee, *Nucl. Phys.* **B239**, 477 (1984) を見よ.

9. S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969).

10. たとえば, H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin–Cummings, Reading, MA, 1982) p.15, 198 を見よ. もとの文献は I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).

10*a*. M. F. Atiyah and I. M. Singer, 文献 6a; B. Zumino, *Relativity, Groups, and Topology II*, B. S. De Witt, R. Stora 編 (North-Holland, Amsterdam, 1984); L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, 文献 7; W. Bardeen and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B244**, 421 (1984); R. Stora, *Progress in Gauge Field Theory*, G. 't Hooft 他編 (Plenum, New York, 1984), 543; O. Alvarez, I. Singer, and B. Zumino, *Comm. Math. Phys* **96**, 409 (1984); L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B262**, 439 (1985); J. Mañes, R. Stora, and B. Zumino, *Commun. Math. Phys.* **102**, 157 (1985); B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B253**, 477 (1985); J. M. Bismut and D. S. Freed, *Commun. Math. Phys.* **106**, 159 (1986); **107**, 103 (1986); D. S. Freed, *Commun. Math. Phys.* **107**, 483 (1986).

10*b*. E. Witten, *Phys. Lett.* **117 B**, 324 (1982).

11. D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **96**, 477 (1969).

12. H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* **D6**, 429 (1972).

13. M. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **7**, 1824 (1966); M. L. Mehta and P. K. Srivastava, *J. Math. Phys.* **7**, 1833 (1966).

13*a*. 標準電弱理論の4クォーク版でのアノマリーの相殺は, 以下の文献で示された. C. Bouchiat, J. Iliopoulos, and Ph. Meyer, *Phys. Lett* **38B**, 519 (1972); S. Weinberg, *Fundamental Interactions in Physics and Astrophysics*, G. Iverson 他編 (Plenum Press, New York, 1973) p. 157.

14. H. Georgi, *Particles and Fields — 1974*, C. Carlson 編 (Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).

15. R. Delbourgo and A. Salam, *Phys. Lett.* **40B**, 381 (1972); T. Eguchi and P. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1251 (1976). また, 以下の文献も見よ. N. K. Nielsen, M. T. Grisaru, R. Romer, and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B140**, 477 (1978); M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **B143**, 114 (1978); S. W. Hawking and C. Pope, *Nucl. Phys.* **B146**, 381 (1978); S. M. Christensen and M. J. Duff, *Phys. Lett.* **76B**, 571 (1978); R. Critchley, *Phys. Lett.* **78B**, 410 (1978); A. J. Hanson and H. Romer, *Phys. Lett.* **80B**, 58 (1978). 一般的な概説としては T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980) がある. $4n+2$ 次元ではエネルギー・運動量テンソルの発散にアノマリーがある. これについては L. Alvarez-Gaumè and E. Witten, *Nuc. Phys.* **B234**, 269 (1984) を見よ.

16. G. 't Hooft, Cargèse Summer Institute, 1979 での講義, *Recent Developments in Gauge Theories*, G 't Hooft 他編(Plenum, New York, 1980). これは *Dynamical Gauge Symmetry Breaking*, E. Farhi and R. Jackiw 編(World Scientific, Singapore, 1982) と, G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle* (World Scientific, Singapore, 1994) にも再録されている. また, 以下も見よ. S. Dimopoulos, S. Raby, and L. Susskind, *Nucl. Phys.*

B173, 208 (1980); S. Coleman and E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1000 (1980); Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, *Nucl. Phys.* **B177**, 157 (1981); A. Zee, Univ. of Pennsylvania report, 1980 (未出版); R. Barbieri, L. Maiani, and R. Petronzio, *Phys. Lett.* **96B**, 63 (1980); G. Farrar, *Phys. Lett.* **96B**, 273 (1980); R. Chanda and P. Roy *Phys. Lett.* **99B**, 453 (1981).

16*a*. S. Weinberg and E. Witten, *Phys. Lett.* **96B**, 59 (1980).

17. J. Preskill and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D24**, 1059 (1981).

18. J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).

18*a*. R. Stora, *Progress in Gauge Field Theory*, G 't Hooft 他編 (Plenum, New York, 1984), 543; B. Zumino, *Relativity, Groups and Topology II*, B. S. De Witt R. Stora 編 (Elsevier, Amsterdam, 1984), 1293; J. Mañes, R. Stora, and B. Zumino, *Commun. Math. Phys.* **102**, 157 (1985).

18*b*. L. D. Faddeev, *Phys. Lett.* **145B**, 81 (1984); B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B253**, 477 (1985).

18*c*. J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 296 (1959).

19. J. A. Dixon, 未出版論文 (1976–9); *Commun. Math. Phys.* **139**, 495 (1991); F. Brandt, N. Dragon, and M. Kreuzer, *Nucl. Phys.* **B332**, 224 (1990); M. Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Talon, and C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B289**, 361 (1992); M. Dubois-Violette, M. Talon, and C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B158**, 231 (1985); *Commun. Math. Phys.* **102**, 105 (1985); J. Mañes and B. Zumino, *Supersymmetry and its Applications: Superstrings,*

Anomalies, and Supergravity, G. W. Gibbons, S. W. Hawking, P. K. Townsend 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

19*a*. たとえば, H. Georgi, 文献 10 の (XXV11.9) 式を見よ.

20. R. Stora, *New Directions in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics – 1976 Cargese Summer School*の講義, M. Lévy and P. Mitter 編 (Plenum, New York, 1977).

21. J. A. Dixon, 文献 19.

22. G. Barnich and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995).

23. W. Troost, P. van Nieuwenhuizen, and A. Van Proeyen, *Nucl. Phys.* **B333**, 727 (1990).

24. この証明は B. Zumino から個人的に聞いた (未出版).

25. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 422 (1983).

26. C-S. Chu, P-M. Ho, and B. Zumino, *Nucl. Phys. B 475*, 484 (1996).

第23章

拡がりのある場の配位

この本では主に, 場の量子論の摂動論的な応用について述べてきた. これらは少なくとも摂動論的には記述できたが, 実際に摂動級数が数値的に適切な値を与えるかどうかは別の問題だ. 摂動論を使う際には, 作用を時空に依存しない通常の場の真空値のまわりで展開し, 指数関数 $\exp(iI)$ の主要な 2 次項を残して, 場のすべての高次項は小さな補正として扱う. しかし 1970 年代中頃以降, インスタントン (instanton)[1] として知られる配位のような, 時空に依存する拡がった場の配位が存在することにより生じる効果にますます関心が高まっている. これらの配位もまた, 作用の停留「点」になっている. 原理的には, これらの配位を経路積分に含めて, そのまわりの揺らぎについて和をとらなければならない. (既に 20.7 節ではインスタントンの配位の 1 例を見た. ただしそこでは別の文脈で応用した.) そのような非摂動論的配位の寄与はしばしば非常に小さいが, 量子色力学では大きく, また標準的な電弱理論では興味深い特異な効果を生じる.

また, 通常の粒子を含む過程の経路積分での補正項ばかりでなく, 実際の物理状態の成分として登場することのできる拡がった場の配位もある. これらの配位には磁気単極子 (magnetic monopole)[2] やスカー

ミオン(skyrmion)[3]のような, 空間の 1 点のまわり, あるいは同じことだが時空の世界線のまわりに集中している粒子状のものが含まれる. また 21.6 節で述べた超伝導体中の渦糸に類似の, 空間の線のまわり, あるいは同じことだが時空の世界面のまわりに集中している紐状の配位[4]もある. さらに離散的対称性の破れ方が異なる空間領域間の領域壁(domain wall)[5]のようなシート状の配位もある. これと対照的に, 上記のインスタントンは時空の点のまわりに集中した**事象的な**配位なので, 実際の物理状態の成分として現れることはない.

拡がった場の配位によっては, その問題の性質から課された境界条件のおかげで安定化することもある. その一例は「バウンス(bounce)」解で, これは真空崩壊[6]の解析に現れ, 23.8 節で議論する. 他の配位は, どのような崩壊モードも禁止する量子数を持っているので保存則により安定だ.[7]

この章ではトポロジーによって安定化した拡がった場の配位にほとんど話を限る. そのような配位を解析する際に, 全て同じトポロジーの道具を使う. それはおもにホモトピー理論だ. したがって全てのトポロジー的に安定な配位を任意次元 d の空間または時空で一緒に考えることから始める.

23.1 トポロジーの有用性

全ての可能な場の配位の空間は, 様々な場のある汎関数 S が有限だという条件によって自明でないトポロジーを与えられることがしばしば起こる. 場の古典論では S はポテンシャル・エネルギー(場合によっては単位面積または単位長さあたりのポテンシャル・エネルギー)だ. 有限な摂動でこれが無限大となる配位を生成することはできない. 古典統計力学では S はハミルトニアンで, ユークリッド時空で定式化された場の量子論では S はユークリッド作用かまたはそれに比例する.

(ユークリッド経路積分とそのいくつかの応用はこの章の補遺 A で述べる.) ユークリッド作用またはハミルトニアンが有限なある平衡な場の配位から出発して, それを有限に保つ揺らぎについて積分することにより, 摂動論を構成する.

二つの場の配位は, S が無限大の禁止された配位を経ずに一方を他方に連続的に変形できるならトポロジー的に同値だという. これは(反射的, 対称的かつ推移的だという意味で) 明らかに同値関係だから, すべての場の配位の集合を, それぞれが同じトポロジーの配位から成る同値類に分類する. 例えば, S が空間 d 次元でのポテンシャル・エネルギー(時間に依存しない場の場合はハミルトニアン) なら, トポロジー的に異なる場の配位は無限のエネルギー障壁によってお互い同士移り合うことが禁止される. 特に, 通常の空間的に一様な真空場とは異なるトポロジーを持つ拡がった配位は, 拡がって空間的に一様になることはできない.

トポロジー的な分類は S の極小点を探す際にも有用だ. 与えられたトポロジーの型をもつ全ての配位について S を最小化する配位を見つけることができれば, その配位はあらゆるトポロジーの型の全ての配位について少なくとも S の極小点になっているはずだ. なぜなら場の小さな変化によってトポロジーの型を変えることはできないからだ. これは S が停留する条件と同等だから, そのような配位は場の方程式の解となる. この種の問題は S がハミルトニアンのときの安定性の問題においてばかりでなく, ユークリッド化された d 次元時空での経路積分で場の変数をそのまわりで展開する元の場の配位を探す際にも生じる. この場合は S はユークリッド作用 I に負符号を付けたもので, この配位のまわりで展開するときに, 主要項は 2 次の自由場の作用で 2 次の項が正しい符号を持つように極小点を探さなければならない.

以下にいくつかの例を示す.[8]

(a) スカーミオン等 連続な大域的対称性の群 G の部分群 H への自発的に破れにともなう実ゴールドストン・ボゾン場 π_a を考える. 19 章で見たように, 次元 $d > 2$ のユークリッド空間でのこれらのゴールドストン・ボゾンのポテンシャル・エネルギーは,

$$S[\pi] = \int d^dx \left[\frac{1}{2}\sum_{ab} g_{ab}(\pi)\partial_i\pi_a\partial_i\pi_b + \ldots\right] \tag{23.1.1}$$

の形をとる. ここで g_{ab} は正定値行列で「$+\ldots$」は π の微分について高次の可能な項を表す. あるいは, (23.1.1) は d 次元ユークリッド時空でのゴールドストン・ボゾン場の作用に負符号を付けたものと見なすこともできる.

有限の S を持つ場の配位は $\partial_i\pi_a(\mathbf{x})$ が無限遠で $|\mathbf{x}|^{-d/2}$ (ここで $|\mathbf{x}| \equiv \sqrt{x_ix_i}$) より速くゼロに近づかなければならない. したがって $\pi_a(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \to \infty$ で定数 $\pi_{a\infty}$ に近づき, この定数との差は $|\mathbf{x}|^{(2-d)/2}$ より速くゼロに近づかなければならない. 任意の点のゴールドストン・ボゾン場 π_a は等質空間つまり剰余類空間 G/H を構成し, G の変換により任意の場の値を任意の別の値に変換できるので, 大域的 G 変換により漸近的な極限 $\pi_{a\infty}$ が特定の値, 例えば $\pi_{a\infty} = 0$ を持つように調整することが常に可能だ. したがって場 $\pi_a(\mathbf{x})$ は, 球面 $r = \infty$ を 1 点と見なした全 d 次元空間からすべての場の値の多様体 G/H への写像を表す.

さて, 無限遠の $(d-1)$ 次元球面を 1 点と見なした d 次元ユークリッド空間は, どちらからも相手に連続的に写像できるという意味でトポロジー的には d 次元球面 S_d (すなわち $(d+1)$ 次元球体の表面) と同じだ. したがって $\mathbf{x} \to \infty$ でゼロに近づく場 $\pi(\mathbf{x})$ は S_d から場の変数の多様体 G/H へのトポロジー的に異なる写像に基づいて分類できる. ここで無限遠点はゼロに写像される. そのような, S_d の 1 点が $\mathcal{M}$ のある固定点に移されるトポロジー的に異なる写像 $S_d \mapsto \mathcal{M}$ の分類の集合は $\pi_d(\mathcal{M})$, すなわち多様体 $\mathcal{M}$ の d 次元**ホモトピー群**

(homotopy group) と呼ばれる．これらのホモトピー群 (およびそれらの群の構造) は次節で説明する．また様々な多様体のホモトピー群の一覧はこの章の補遺 B で与える．多様体 $\mathcal{M}$ が線形空間ならホモトピー群 $\pi_d(\mathcal{M})$ は ($\mathbf{x} \to \infty$ で定数に近づく任意の場の配位 $\pi(\mathbf{x})$ は場があらゆる場所でその定数値をとる配位に連続的に変形できるという意味で) 自明だが，ゴールドストン・ボゾン場の多様体 $\mathcal{M} = G/H$ はしばしば自明でないホモトピー群を持つことを知っておけばとりあえずは十分だ．量子色力学が関係する $SU(2) \otimes SU(2)$ が $SU(2)$ に破れる場合や $SU(3) \otimes SU(3)$ が $SU(3)$ に破れる場合には多様体 G/H はそれぞれ $SU(2)$ あるいは $SU(3)$ に等しく，補遺 B によればホモトピー群 $\pi_3(H)$ は自明でない．$d = 3$ でポテンシャル・エネルギーの極小点でのトポロジー的に自明でない場は**スカーミオン** (skyrmions)[3] と呼ばれる．陽子のようなバリオンはある意味で中間子のみの理論でのスカーミオン解と見なすことができる．

汎関数 (23.1.1) は，被積分関数に $\partial_i \pi_a$ の高次冪を含む項が含まれないとスカーミオンの停留点を持たない．そのような項がなければ，どのようなトポロジー的に自明でない場の配位も S の連続値をとり，その連続値は π が特異性を持つ下限 $S = 0$ にまで達する．したがってトポロジーによってそのような配位を安定化させることはできない．これは一般に**デリックの定理** (Derrick's theorem)[9] と呼ばれている．この定理を証明するには，任意の場の配位 $\pi_a(\mathbf{x})$ について同じトポロジーを持った別の配位，

$$\pi_a^R(\mathbf{x}) \equiv \pi_a(\mathbf{x}/R)$$

を導入することができることに留意する．ここで R は任意の実で正のスケール因子だ．すると (23.1.1) で明示した項について，

$$S[\pi^R] = R^{d-2} S[\pi]$$

が成り立つ. $d > 2$ の場合, これは $R \to 0$ のとき R の減少関数なので $S[\pi^R]$ の連続値は下に $S = 0$ にまで広がっている. さらに $S[\pi] > 0$ だ. なぜなら $S[\pi]$ は $\pi(\mathbf{x})$ が定数の場合にのみゼロで, これは π がトポロジー的に自明でないと仮定したので不可能だ. したがってこの下限は $R = 0$ でだけ到達できるが, その場合には $\pi_a^R(\mathbf{x})$ は特異性を持つようになる.

ゴールドストン・ボゾン場の配位はS に高次の微分項を含めることで安定化させることができる. 例えば, $S[\pi] = T[\pi] + D[\pi]$, ただし,

$$T[\pi] \equiv \int d^d x \, \tfrac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b \geq 0 \, ,$$

$$D[\pi] \equiv \int d^d x \, f_{abcd}(\pi) \, \nabla \pi_a \cdot \nabla \pi_b \, \nabla \pi_c \cdot \nabla \pi_d \geq 0$$

ととれば, 今までどおり $T[\pi^R] = R^{d-2} T[\pi]$ だが, $D[\pi^R] = R^{d-4} D[\pi]$ なので, $2 < d < 4$ なら $S[\pi^R]$ は有限の R で最小値をとる. 特に物理的に興味深い $d = 3$ の場合にはそうだ.

スカーミオンの理論の問題は $D[\pi]$ のような高次微分項を作用に含めなければならないという点ではない. 19.5 節で述べたように, ゴールドストン・ボゾンのどのような有効場理論の作用でもそのような項は予想される. 問題は他の無限個の高次微分項を排除する理論的根拠が無いことだ. 異なる数の微分を持つ項の間の均衡によって安定化する配位については, それらの項の全ては一般に同じ程度の大きさになり, その結果現実的な計算は不可能になる.

(b) 領域境界　離散的対称性が破れると, 異なる領域で対称性が異なる破れ方をし, それらの領域は真空場がポテンシャルのある最小点から別の最小点に転移する領域境界で隔てられるという可能性がある. 例えば, $y - z$ 面内の平坦な領域境界を考え単位面積あたりのエネル

ギーは,

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi)\right] \tag{23.1.2}$$

で与えられるとする. ここで $\phi(x)$ は境界に垂直な方向に沿った距離 x のみに依存すると仮定した実スカラー場で, $V(\phi)$ は反転 $\phi \to -\phi$ について対称なポテンシャルで, 場の値 $\pm\overline{\phi}$ でのみ最小値をとるとする. $V(\phi)$ の付加定数は, $V(\phi)$ の最小値がゼロになるように調整しておくのが便利だ. その場合 $V(\phi) \geq 0$ で, $\phi = \pm\overline{\phi}$ でだけ $V(\phi) = 0$ だ. S を有限に保つには, ϕ が $x \to \infty$ で $+\overline{\phi}$ か $-\overline{\phi}$ のどちらかに近づき, また $x \to -\infty$ で $+\overline{\phi}$ か $-\overline{\phi}$ に近づく必要がある. すると四つのトポロジー的に異なる配位があることになる. そのうちの二つでは ϕ は $x \to \pm\infty$ で同じ極限に近づき, したがって配位は $\phi(x)$ があらゆるところで定数となる真空配位に滑らかに変形できる. また残りの二つでは $x \to \pm\infty$ で ϕ が逆符号の極限に近づき, これはトポロジー的に安定だ. ここで $\pi_0(G)$ に従って場の配位を分類しよう. ここで任意の多様体 $\mathcal{M}$ について $\pi_0(\mathcal{M})$ は通常 $\mathcal{M}$ の連結成分の集合として定義されている. また G は対称性の群で, 今の場合は反転 $\phi \to -\phi$ の Z_2 群だ.

ここで23.3 節と 23.5 節でより複雑なモノポールとインスタントンの場合を取り扱う際に有用になるボゴモルニ[10] の技法を導入するのが適切だ. (23.1.2) を,

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)}\right)^2 \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} \sqrt{2V(f)}\, df \tag{23.1.3}$$

の形に書き換える. (23.1.3) の右辺の第 2 項の被積分関数は「トポロジー荷電」と見なすことができる. これは $x \to \pm\infty$ で場がとる値にのみ依存する. $x \to +\infty$ と $x \to -\infty$ とで同じ極限値に近づく配位についてはこの積分はゼロになり, S の最小値はゼロで, それは場が定数のときに達成される. 場 $\phi(x)$ が $x = \pm\infty$ で異なる値をとる場合には, (23.1.3) の $\pm$ の符号を以下のように下限を与えるように選ぶこと

ができる.

$$S[\phi] \geq \int_{-\overline{\phi}}^{\overline{\phi}} \sqrt{2V(f)}\, df \ . \tag{23.1.4}$$

この下限は, (23.1.3) の第 1 項がゼロのときに達成されるが, これは言い換えれば,

$$x = \pm \int_0^{\phi(x)} \frac{df}{\sqrt{2V(f)}} + x_0 \tag{23.1.5}$$

が満たされるときだ. ここで x_0 は積分定数で, 明らかに領域境界の中心の位置を与える. デリックの定理はここでの解の障害にならない. なぜなら, 領域境界については $d = 1$ なので, スケールを変えた $\phi(x/R)$ に対して (23.1.2) の被積分関数の二つの項の積分はそれぞれ R^{-1} と R^{+1} のように振舞うからだ.

(23.1.5) はもっと直接的に得ることもできた. すなわち, (23.1.2) が $\phi(x)$ の小さな変分に対して停留するという条件から $\phi(x)$ についての 2 次微分方程式を導いて, さらにこの微分方程式を使って $\frac{1}{2}(d\phi/dx)^2 - V(\phi)$ が x に関して定数であることを示せばよい. 式 (23.1.3) に基づく導出の利点は, 境界の位置 x_0 の変化にともなう「ゼロ・モード」を除いて, (23.1.5) の解が境界の平坦さを保持する小さな摂動に対して安定なことがただちにわかることだ. (23.1.2) の被積分関数に $\frac{1}{2}(d\phi/dy)^2 + \frac{1}{2}(d\phi/dz)^2$ の項を加えると, この解は, y と z を固定して $x \to \pm\infty$ としたときに $\delta\phi(x, y, z) \to 0$ を満たす任意の摂動 $\delta\phi(x, y, z)$ に対して安定なこともわかる.

もし離散的な自発的に破れた対称性が存在すれば, 初期宇宙でこれらの対称性が破れたときに領域境界が形成されただろう. もし領域境界が消失しなかったのならば, 現在の宇宙で観測される等方性と一様性はひどくゆがめられただろう.[5] 現在 CPT 以外のどのような厳密な離散的対称性も, またどのような自発的に破れた近似的または厳密な離散的対称性も知られていないので, 今のところこれは問題とはならない.

(c) インスタントン等 次に,

$$S[A] = \tfrac{1}{4} \int d^d x\, F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} \tag{23.1.6}$$

のゲージ理論を考える. ここで $F_{\alpha ij}$ は通常の場の強度テンソルで, $d \geq 4$ とする. これは d 次元ユークリッド時空の量子ゲージ理論の作用と見なすことも, $(d+1)$ 次元時空の時間的ゲージ $A^0_\alpha = 0$ での古典ゲージ場のポテンシャル・エネルギーと見なすこともできる.

$S[A]$ が有限になるためには, $F_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \to \infty$ でゼロにならなければならない. これは $\mathbf{x} \to \infty$ で $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ が十分に速くゼロになることで達成できるが, $d \geq 4$ の場合でも場 $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ が $1/|\mathbf{x}|$ の程度にゆっくりとゼロになる場合には場が, $|\mathbf{x}| \to \infty$ で純ゲージ,

$$it_\alpha A_{\alpha i}(\mathbf{x}) \to g^{-1}(\hat{\mathbf{x}})\, \partial_i g(\hat{\mathbf{x}}) \tag{23.1.7}$$

に近づく限り $S[A]$ が有限になることが可能だ. ここで $g(\hat{\mathbf{x}})$ は方向に依存するゲージ群 G の元だ. さらに任意のゲージ群の元 $g_0 \in G$ について $g(\hat{\mathbf{x}})$ を $g_0 g(\hat{\mathbf{x}})$ で置き換えても $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ には影響がないので, $g_0 = g^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ と選べば任意の 1 方向 $\hat{\mathbf{x}}_1$ については $g(\hat{\mathbf{x}}_1) = 1$ となるようにできる. したがって有限の $S[A]$ を持つ各々のゲージ場は, 点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ は G の単位元に移される単位球面 $|\hat{\mathbf{x}}| = 1$ から群の多様体への写像を定義する. (ゲージ場が $|\mathbf{x}| \to \infty$ で $1/|\mathbf{x}|$ より速くゼロになる場合には, この写像は単位球面上の全ての点をゲージ群の単位元に移す.) S_{d-1} の 1 点が G の固定された元に移される写像 $S_{d-1} \mapsto G$ のトポロジー的に異なるものへの分類の集合は $\pi_{d-1}(G)$, すなわち群の多様体の $(d-1)$ 次元ホモトピー群と呼ばれる. この章の補遺 B で示すように, $\pi_3(G)$ は任意の半単純群 G について自明でない. $d = 4$ の場合にトポロジー的に自明でない $S[A]$ の停留点は**インスタントン** (instanton) と呼ばれる.[1] その量子色力学における重要性については 23.5 節と 23.6 節で述べる.

$S[A]$ が場 $A(\mathbf{x})$ で停留するためには, $A(\mathbf{x})$ は場の方程式,

$$\partial_i F_{\alpha ij} = 0 \tag{23.1.8}$$

を満たす必要がある. 以前と同様な簡単なスケール変換の議論により $S[A]$ のトポロジー的に自明でない極小点を見つけることが期待できる次元 d の値を制限できる. $A^R(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)/R$ と定義する. すると,

$$S[A^R] = R^{d-4} S[A]$$

なので $d \neq 4$ の場合 $S[A] = 0$ 以外には $S[A]$ のトポロジー的に自明でない停留点は存在し得ない. しかし $S[A] = 0$ ならあらゆる点で $F_{\alpha ij} = 0$ なので, ゲージ変換によって $A_{\alpha i}$ もあらゆる点でゼロになるようにすることができる.

23.5 節で見るように, $d = 4$ の場合には, $S[A]$ (ここでは $-I[A]$ と同定する) が停留し無限遠以外では $F_{\alpha ij}$ がゼロでないインスタントン解を見つけることが可能だ. 上記のスケール変換の議論から $A(\mathbf{x})$ がそのようなインスタントン解なら $A(\mathbf{x}/R)/R$ もインスタントン解だということがわかる. しかしこの縮退は量子補正により取り除かれる.

(d) 磁気単極子, 渦糸等　次にゲージ場とゲージ群の線形表現を持つスカラーの理論を考える. 作用は,

$$S[\phi, A] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i \phi_a D_i \phi_b + \frac{1}{4} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} + U(\phi) \right] \tag{23.1.9}$$

とする. ここで $g_{ab}(\phi)$ は正定値行列 (通常は ϕ に依らない) で, $U(\phi)$ は下に有界で, 最小値がゼロになるように定数だけずらしてあるとする. また $F_{\alpha ij}$ と D_i は通常の場の強度とゲージ共変微分だ. $U(\phi)$ はゲージ群 G の変換のもとでスカラーで $g_{ab}(\phi)$ はテンソルだとする. この場合も, (23.1.9) は d 次元ユークリッド時空での場の量子論の作

用, あるいは $(d+1)$ 次元時空の時間的ゲージでの場の古典論のポテンシャル・エネルギーを与える.

$S[\phi, A]$ が有限であるには $\mathbf{x} \to \infty$ で $U(\phi(\mathbf{x}))$ がゼロになる必要がある. $U(\phi)$ がゼロになる ϕ の組は G のもとで不変で, 離散的でも連続的でもよい. 上述の (b) の場合にはこの組が離散的な例を扱った. ここでは $U(\phi)$ のゼロ点が変換 $g \in G$ で関係づけられた場から成る連続多様体 $\mathcal{M}_0$ を構成する, 破れた対称性の場合を考察する. この場合各々の $\phi(\hat{\mathbf{x}})$ は変換 $\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \in G$ を任意の 1 方向 $\hat{\mathbf{x}}_1$ の場の値 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ に作用させて得られる. したがって場 $\phi(\mathbf{x})$ は G/H 剰余類空間への写像 $S_{d-1} \mapsto G/H$ を定義すると考えることができる. この剰余類空間は, 群 G で元 g_1 と g_2 が $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ を不変に保つ部分群 $H \subset G$ のある元 h を右からかける分しか異ならなければ, つまり $g_1 = g_2 h$ ならば両者を同一視する空間のことだ. 特に, 点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ は部分群 H に写像される. これは, $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ に $\gamma(\hat{\mathbf{x}}_1)$ を作用させると $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ 自身になるようにするためだ. したがって $\mathbf{x} \to \infty$ で多様体 $\mathcal{M}_0$ 上の値に近づく場は, S_{d-1} から G/H への写像で点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ を G/H の固定「単位」元 H に移すもののトポロジーの違いによって分類される. そのような S_{d-1} の 1 点を G/H の固定元に移す写像 $S_{d-1} \mapsto G/H$ でトポロジー的に異なるものへの分類の集合は $\pi_{d-1}(G/H)$, すなわち多様体 G/H の $(d-1)$ 次元ホモトピー群と呼ばれる.

この場合 $\partial_i \phi(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \to \infty$ で $1/|\mathbf{x}|$ の振舞いをする. $S[\phi]$ が有限であるには, $\mathbf{x} \to \infty$ で $D_i \phi$ は $|\mathbf{x}|^{-d/2}$ より速くゼロにならなければならないので, $it_\alpha A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \to \infty$ で $|\mathbf{x}|^{-d/2}$ より速く $\gamma^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_i \gamma(\hat{\mathbf{x}})$ に近づく必要がある. これは純ゲージ場なので, 場の強度テンソル $F_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ は $|\mathbf{x}|^{-d/2-1}$ より速くゼロになる. これは $\int d^d x \, F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}$ が収束するのに十分な速さだ.

デリックの定理は (23.1.9) で定義されたゲージ理論には適用できないが, 同じ論法をたどるとどういう結論が導かれるかは興味深い. 与

えられた任意の場 $\phi(\mathbf{x})$ と $A(\mathbf{x})$ について, ここでも $\phi^R(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{x}/R)$ および $A^R(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)/R$ と定義する. すると (23.1.9) のハミルトニアンの 3 項のスケール変換の性質は,

$$T[\phi^R, A^R] = R^{d-2}T[\phi, A]\,, \quad K[A^R] = R^{d-4}K[A]\,,$$
$$V[\phi^R] = R^d V[\phi]$$

となる. ここで, $T[\phi, A] \equiv \frac{1}{2}\int d^dx \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i\phi_a D_i\phi_b$, $K[A] \equiv \frac{1}{4}\int d^dx F_{\alpha ij}F_{\alpha ij}$, $V[\phi] \equiv \int d^dx\, U(\phi)$ とおいた. $d > 4$ では, $S[\phi^R, A^R]$ は R のどのような有限値でも最小値を持たないので, 自明でないトポロジーを持つ安定な配位は存在しない. また $0 < d < 4$ では $S[\phi^R, A^R]$ が最小値をとる R の有限値を見つけることは容易だ.

物理的に興味のある $d = 3$ の場合には, トポロジー的に自明でない場の配位はホモトピー群 $\pi_2(G/H)$ に従って分類され, それは ($SU(2)$ のような) 単連結群 G が電磁理論の $U(1)$ を含む H に破れたときに自明でない. $d = 3$ のトポロジー的に自明でない古典的な場の配位は**磁気単極子** (magnetic monopole) と呼ばれる.[2] 23.3 節で見るように, その磁気単極子の強度は量子化され, その異なる値は $\pi_2(G/H)$ の異なる元に対応する.

$d = 2$ の場合には, トポロジー的に自明でない配位は $\pi_1(G/H)$ の元に対応する. それは G が $U(1)$ や $SO(3)$ のような非単連結群で完全に破れているかまたは離散部分群に破れているときに自明でない. $d = 2$ のトポロジー的に自明でない古典的な場の配位は**渦糸**の断面だ. その 1 例は超伝導で, その場合は $G = U(1)$ が自発的に $H = Z_2$ に破れている. 21.6 節で見たように, 渦糸は第 2 種超伝導体で磁場の強さがある範囲内のときに生じ, 渦糸が持つ磁束は量子化されるが, 磁束の異なる値は $\pi_1(U(1)/Z_2)$ の異なる元に対応する. 渦糸は相対論的な場の量子論においても生じることが可能で,[4] 初期宇宙での対称性が破れる転移で生成される可能性があるが, その場合には**宇宙紐** (cosmic

string)[11] と呼ばれる.

単極子と渦糸はともに, 純粋にトポロジー的な考え方から導ける注目すべき性質を持っている. どちらの場合も, 配位を囲む大きな球面 (渦糸の場合は S_1, 磁気単極子の場合は S_2) 上でのゴールドストン・ボゾン場 $\pi_a(\mathbf{x})$ の形は, 滑らかに定数に変形することができないようにねじれている. 特に, ある種の特異性に出くわすことなく滑らかにこれらの球面の半径をゼロに縮めることは不可能だ. なぜなら, 球面上で特異性を持たない場 $\pi_a(\mathbf{x})$ は球面の半径がゼロに縮むと定数にならなければならないからだ. どちらの場合の特異性も群 G がもはや破れていない芯 (渦糸の場合は線またはおそらく管, 単極子の場合は点またはおそらく球) で生じるので, 系はもはやゴールドストン・ボゾン場では記述されず, G のもとで線形に変換する秩序パラメータで記述される.

$d=4$ では R の関数 $S[\phi^R, A^R]$ は $T[\phi, A]=V[\phi]=0$ の場合にのみある有限の R で最小値を持つことができ, それには $\phi(\mathbf{x})$ があらゆる場所で $U(\phi)=0$ となる値をとることが必要だ. この値はゲージ群 G の変換で関係付けられる連続体を形成すると仮定すると, ゲージ変換によりそれらは定数 $\phi(\mathbf{x})=\phi_0$ にできる. するとこのゲージでは条件 $T[\phi, A]=0$ は全ての破れた対称性について $A_a(\mathbf{x})=0$ を意味し, それについては $t_a\phi_0 \neq 0$ だ. そのような場の配位で $T[\phi, A]$ と $V[\phi]$ は両方とも停留するので, $S[\phi, A]$ が停留するには $K[\phi, A]$ も停留しなければならない. これは, ゼロでないゲージ場 $A_{i\mu}$ (それは ϕ_0 によって破れない部分群 $H \subset G$ に属する) はユークリッド時空のヤン・ミルズ場の方程式,

$$\partial_\mu F_{i\mu\nu}=0 \tag{23.1.10}$$

を満たさねばならないことを意味する. したがってこの場合は, 場合 (c) に帰着する. ただし, ゲージ群 G は破れていない部分群 H で置き

換わる.

23.2　ホモトピー群

前節では, ハミルトニアンまたは他の汎関数が有限になる場の配位を適切なホモトピー群の元との対応で分類することを学んだ. しかしホモトピー群がどういう意味で群なのかは説明していないし, また群の構造にどのような物理的意味付けも与えていない. 以下で見るように, ホモトピー群の元の積の規則の自然な定義がある. それに従えば, d 次元の多様体 $\mathcal{M}$ を形成する二つの拡がった場の配位で $\pi_d(\mathcal{M})$ の異なる元 c_1 と c_2 に属するものは, 連続的に融合して $\pi_d(\mathcal{M})$ の元 $c_1 \times c_2$ に属する配位を形成することができる.

最初に任意の多様体 $\mathcal{M}$ の 1 次元ホモトピー群 $\pi_1(\mathcal{M})$ を定義する. これは多様体の**基本群** (fundamental group) とも呼ばれる. すでに見たように, ある剰余類空間 G/H の自明でない $\pi_1(G/H)$ が存在することは, 3 次元の渦糸 (あるいは 2 次元の単極子) がトポロジー的に安定であるための条件だ. $\pi_1(\mathcal{M})$ を考察した後で, より一般のホモトピー群に移る.

連結多様体 $\mathcal{M}$ は, その多様体上のある閉曲線 $p(z)$ ($0 \le z \le 1$ の値をとる単一の変数 z により $p(0) = p(1)$ とパラメータ化される) で連続変形により 1 点に縮めることができないものが存在するとき, 多重連結だという. 連結多様体上では任意のそのような閉曲線を連続変形して閉曲線上の任意の 1 点が多様体上の任意の点に位置するようにすることが常に可能なので, $p(0) = p(1) = p_0$ を満たす閉曲線のみに注目すればよい. ここで p_0 は多様体の任意の固定点で, **基点** (base point) と呼ばれる. そのような二つの閉曲線 $p_1(z)$ と $p_2(z)$ は, お互いに相手に変形できれば, すなわち $0 \le t \le 1$ で定義され

$$p(z,0) = p_1(z)\ , \qquad p(z,1) = p_2(z)\ ,$$

$$p(0,t) = p(1,t) = p_0$$

を満たす連続関数 $p(z,t)$ が存在すれば, ホモトピー的に同値だという. ホモトピー同値の関係は, 対称的, 反射的, 推移的だという意味で同値関係なので, それによって多様体上の閉曲線の空間は同値類に分類される. 二つの閉曲線はホモトピー同値ならば, またそのときに限り同じ類に属する. この同値類の集合は多様体の 1 次元ホモトピー群 $\pi_1(\mathcal{M})$ と呼ばれる.

$\pi_1(\mathcal{M})$ の積の規則を定義するために, $\pi_1(\mathcal{M})$ の各同値類 c 毎に基点 p_0 から出発して基点で終わる標準閉曲線 $p[z;c]$ を選ぶ. 任意の二つの同値類 c_1 と c_2 について, 「積」 $c_1 \times c_2$ を, p_0 を出発し $p[z,c_1]$ をたどって p_0 に戻りそれから $p[z,c_2]$ をたどって再び p_0 に戻る閉曲線 $p[z,c_1,c_2]$ を含む同値類と定義する. 形式的には,

$$p[z,c_1,c_2] \equiv \begin{cases} p[2z,c_1] & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z-1,c_2] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

とすればよい.

次に, このように定義された積は群の条件を満たすことを示さなければならない. まずこの積が結合則を満たすことを確かめる. このために, $(c_1 \times c_2) \times c_3$ は基点から標準閉曲線 $p[z,c_1 \times c_2]$ をたどって基点に戻りそれから標準閉曲線 $p[z,c_3]$ をたどって再び基点に戻る曲線 $p[z,c_1 \times c_2, c_3]$ を含む同値類で, $c_1 \times (c_2 \times c_3)$ は基点から標準閉曲線 $p[z,c_1]$ をたどって基点に戻りそれから標準閉曲線 $p[z,c_2 \times c_3]$ をたどって再び基点に戻る曲線 $p[z,c_1,c_2 \times c_3]$ を含む同値類だということに留意する. 定義から, 閉曲線 $p[z,c_1 \times c_2]$ は基点から $p[z,c_1]$ をたどって基点に戻りそれから $p[z,c_2]$ をたどって再び基点に戻る曲線に変形でき, $p[z,c_2 \times c_3]$ は基点から $p[z,c_2]$ をたどって基点に戻りそれから $p[z,c_3]$ をたどって再び基点に戻る曲線に変形できる. したがって, 曲線 $p[z,c_1 \times c_2,c_3]$ と $p[z,c_1,c_2 \times c_3]$ はともに, 基点から $p[z,c_1]$

をたどって基点に戻りそれから $p[z, c_2]$ をたどって再び基点に戻り最後に $p[z, c_3]$ をたどって再び基点に戻る曲線に変形でき, よって両者はお互いに相手に変形できる. これは,

$$(c_1 \times c_2) \times c_3 = c_1 \times (c_2 \times c_3)$$

を示している.

$\pi_1(\mathcal{M})$ の単位元 e は基点に留まる曲線 $p[z, e] = p_0$ を含む同値類と定義される. $e \times c = c$ を確かめるには,

$$p[z, e, c] = \begin{cases} p_0 & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z - 1, c] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

に留意すればよい. しかしこの曲線は,

$$p(z, t) = \begin{cases} p_0 & 0 \le z \le t/2 \\ p[(2z - t)/(2 - t), c] & t/2 \le z \le 1 \end{cases}$$

ととれば $p[z, c]$ に連続的に変形できる. なぜならこの $p(z, t)$ は $t = 1$ で $p[z, e, c]$ に等しく $t = 0$ で $p[z, c]$ に等しいからだ. 積 $e \times c$ は $p[z, e, c]$ を含む同値類で, それは今見たように $p[z, c]$ を含む同値類と等しいので, ちょうど c に等しい. $c \times e = c$ の証明は同様にできる.

c の同値類の「逆」 c^{-1} は標準閉曲線 $p[z, c]$ と同じ経路を逆向きに回る閉曲線 $p^{-1}[z, c]$ すなわち,

$$p^{-1}[z, c] \equiv p[1 - z, c]$$

を含む同値類だ. これは必ずしも「標準」閉曲線 $p[z, c^{-1}]$ と同一ではないが, 同値類 c^{-1} の定義よりこの二つの閉曲線はお互いに相手に変形できる. $c^{-1} \times c = e$ を確かめるには, $p[z, c^{-1}]$ を $p^{-1}[z, c]$ に変形すると曲線 $p[z, c^{-1}, c]$ は,

$$p[z, c^{-1}, c] \to \begin{cases} p[1 - 2z, c] & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z - 1, c] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

に変形されることに気付けばよい. しかしこの曲線は,

$$p(z,t) = \begin{cases} p[1-2tz, c] & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2tz+1-2t, c] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

ととれば連続的に $p[z,e] = p_0$ に変形できる. なぜならこの $p(z,t)$ は $t=1$ で $p[z,c^{-1},c]$ に等しく $t=0$ で $p[z,e]$ に等しいからだ. 積 $c^{-1}\times c$ は $p[z,c^{-1},c]$ を含む同値類で, それは今見たように $p[z,e]$ を含む同値類に等しく, それはまさに e だ. $c\times c^{-1}=e$ の証明は同様だ. 単位元と逆元の存在は, これらの同値類が**群**を形成することを示している.

自明でない 1 次元ホモトピー群を持つ多様体 $\mathcal{M}$ の典型例は円そのもの, つまり $\mathcal{M}=S_1$ だ. これは $\theta=0$ と $\theta=2n\pi$ (n は正または負の任意整数) を同一点と見なす角 θ でパラメータ化できる. ホモトピー群は, $0\le z\le 1$ で定義されある基点 $\theta(0)=\theta_0$ から出発して同じ基点 $\theta(1)=\theta_0+2n\pi$ で終わる関数 $\theta(z)$ の類から成る. 二つのそのような関数は, もしお互いの n の値が等しければ, またそのときに限り連続的に相手に変形できる. したがって $\pi_1(S_1)$ は正または負の整数 n を指標とする可算無限個の類 c_n から成る. さらに, 二つの類 c_n と c_m の「積」は, 基点から出発して円を n 回まわって基点に戻り, それから基点から円を m 回まわって基点に戻る曲線からなるので, ここでは積はちょうど和,

$$c_n\times c_m = c_{n+m} \tag{23.2.1}$$

になる. したがって,

$$\pi_1(S_1) = Z \tag{23.2.2}$$

だ. ここで Z は正と負の整数の和の群だ. 直接の物理的応用の一つは, ゲージ群 $SO(2)$ が自発的に完全に破れる場合だ. その剰余類空間は単に $SO(2)$ で, それは円のトポロジーを持つので, この場合は正または負の整数 n で特徴付けられる無限個の型のトポロジー的に安定な渦糸が存在する. 例えばこれは第 2 種超伝導体の場合で, その場合

は 21.6 節で見たように電磁理論のゲージ不変性が離散的部分群 Z_2 に自発的に破れている.

より一般的には, 全ての $d>1$ の球面 S_d は単連結で, これはそれらが自明な 1 次元ホモトピー群を持つことを意味する. このことは慣習的に,

$$\pi_1(S_d)=0 \qquad \text{for } d>1 \tag{23.2.3}$$

と表される. より馴染みのあるリー群のうち少数のものだけが多重連結だ.

$$\pi_1(G)=\begin{cases} Z & G=U(k) \quad k\geq 1\\ Z_2 & G=SO(k) \quad k\geq 3\\ 0 & G=Spin(k) \quad k\geq 3\\ 0 & G=SU(k) \quad k\geq 2\\ 0 & G=USp(2k) \quad k\geq 1\\ 0 & G=G_2,F_4,E_6,E_7,E_8 \end{cases} \tag{23.2.4}$$

ここで Z_2 は二つの元 1 と -1 を持つ群で群の積は通常の積で定義される. また $Spin(n)$ は $SO(n)$ の単連結な被覆群だ. (2.7 節で見たように $Spin(3)$ は $SU(2)$ と同じだ.) また, 二つの多様体 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ の直積については基本群は,

$$\pi_1(\mathcal{M}\times\mathcal{M}')=\pi_1(\mathcal{M})\times\pi_1(\mathcal{M}') \tag{23.2.5}$$

で与えられる.

3 次元で二つの離れた平行な渦糸を近づけたときに何が起こるかを考えれば, $\pi_1(\mathcal{M})$ の群構造の物理的意味を理解できる. 渦糸が十分に離れていればそれらの場は相互作用しないので, 配位は各渦糸が属する $\pi_1(G/H)$ の類 c' と c'' を指定することで記述される. 全体の配位が属する類 c は両方の渦糸を囲む非常に大きな円上の場の振舞いで決まる. 連続変形によりこの非常に大きな円を, 一つの円が一つの渦糸を囲む形の二つの大きな円に変形しそれらが二つの渦糸の中間点

で交差するようにできる. 2 次元空間のこの閉曲線を回るとき, 類の積の定義とちょうど同じように, 最初に類 c' の閉曲線の一つからなる G/H の曲線をたどり, 次に類 c'' の閉曲線の一つをたどる. すると全体の配位は $c = c' \times c''$ の類に属し, したがって二つの渦糸は融合してこの類の渦糸を形成することだけが可能だ. 特に, 二つの渦糸は $c'' = {c'}^{-1}$ のときにだけ消滅できる.

例えば, (超伝導体での $G/H = SO(2)/Z_2$ のように) $\pi_1(G/H) = Z$ のとき, 3 次元では類 c_n と c_m の二つの渦糸は融合して類 c_{n+m} の渦糸を形成できるので, $n = -m$ のときに限って消滅できる. 一方, ($N \geq 3$ として $G = SO(N)$ で H は自明のときのように) $\pi_1(G/H) = Z_2$ のとき, 3 次元では Z_2 の元 -1 に対応する 1 種類の渦糸しか存在せず, $(-1)^2 = 1$ なのでどの二つの渦糸も消滅できる.

次に一般のホモトピー群 $\pi_k(\mathcal{M})$ を考える. これは, 円 S_1 から多様体 $\mathcal{M}$ への写像を考える代わりに, k 次元球面 S_k (($k+1$) 次元球体の表面) から $\mathcal{M}$ への写像を考えるという点を除いて $\pi_1(\mathcal{M})$ とよく似ている. ここでも S_k の 1 点は常に $\mathcal{M}$ の同じ「基点」 p_0 に移される. そのような二つの写像は, S_k の同じ点は常に基点に移されるようにしながら一方を連続的に他方に変形できれば同値だ. k 次元ホモトピー群 $\pi_k(\mathcal{M})$ はこれらの写像の同値類から成る元を持つ.

d 次元球面 S_d を, 境界上の全ての点を 1 点と同定する d 次元超立方体の内部と見なすのがしばしば便利だ. 例えば, すでに見たように, 円 S_1 は点 $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ を同一視した区間 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ として扱える. 同様に, 地球表面のような S_2 を, 南極を切り開いてできた面を広げることで単位正方形 $0 \leq z_1 \leq 1$, $0 \leq z_2 \leq 1$ 上に写像できる. この正方形から $\mathcal{M}$ への連続的な写像は境界上の全ての点を $\mathcal{M}$ の同一点に移さなければならない. なぜなら境界上の全ての点は南極という同一点だからだ. 一般に, S_d から $\mathcal{M}$ への二つの写像 $p(z_1, \cdots z_d)$ と $p'(z_1, \cdots z_d)$ は, 超立方体の境界上の p を基点 p_0 に等しく取りながら

一方から他方に連続的に変形できればホモトピー同値だ.

これまでと同様に, 各同値類 c 毎に標準写像 $p(z_1,\cdots z_d;c)$ を選ぶ. c_1 と c_2 の積は写像,

$$p(z_1,z_2,\cdots z_d;c_1,c_2)=\begin{cases} p(2z_1,z_2,\cdots z_d;c_1) & 0\le z_1\le \frac{1}{2} \\ p(2z_1-1,z_2,\cdots z_d;c_2) & \frac{1}{2}\le z_1\le 1 \end{cases} \tag{23.2.6}$$

を含む同値類と定義される. 単位元 e は, 全ての z について $p=p_0$ という写像を含む同値類と定義され, c の逆元 c^{-1} は,

$$p^{-1}[z_1,z_2,\cdots z_d;c]=p[1-z_1,z_2,\cdots z_d;c] \tag{23.2.7}$$

の写像を含む同値類と定義される. π_1 と同じやり方で, この積は結合則を満たし, $e\times c=c\times e=c$ と $c^{-1}\times c=c\times c^{-1}=e$ を満たすことを示せる. $n\ge 2$ の $\pi_n(\mathcal{M})$ はすべて可換だ. (2 個以上の点を取り除いた平面のように, 多様体 $\mathcal{M}$ で $\pi_1(\mathcal{M})$ が非可換なものが存在する.)

$\pi_k(\mathcal{M})=Z$ の場合はいずれも, k 次元球面 S_k から $\mathcal{M}$ の k 次元球面 S'_k への 1 対 1 写像が存在しなければならない. これは Z の元「1」に対応する. (これは単位元ではない. 単位元はゼロだ.) Z の元 ν で $\nu=2,3,\ldots$ は S_k から $\mathcal{M}$ の同じ k 次元球面 S'_k への写像で S'_k を ν 回被覆し, 変換 $S_k\to S'_k$ のヤコビアンが正のものに対応する. Z の元 ν で $\nu=-1,-2,\ldots$ は写像 $S_k\to S'_k$ で S'_k を $|\nu|$ 回被覆し変換 $S_k\to S'_k$ のヤコビアンが負のものに対応する.

例えば, 前節で見たように磁気単極子は単連結群 G が電磁理論の $U(1)$ に破れるときに生じる. この場合この章の補遺 B に示したように,

$$\pi_2(G/U(1))=\pi_1(U(1))=Z \tag{23.2.8}$$

なので, 磁気単極子は整数値の量子数 ν を持ち, それは 23.3 節で示すように磁荷に比例する. この量子数は, 単極子を囲む大きな半径の 2 次元球面がゴールドストン・ボゾン場の多様体 $G/U(1)$ の 2 次元

球面に写像される回数を与え(ν が正か負かに応じて両者の 2 次元球面の相対的方向がそれぞれ同じか逆かになる), したがって**巻付き数** (winding number) と呼ばれる. 群 Z の構造から, 量子数 ν の単極子は量子数 ν' の単極子と融合して量子数 $\nu+\nu'$ の単極子を形成することしかできないという意味で, この量子数は保存することがわかる.

破れていない部分群が $n \geq 3$ の $SO(n)$ ならば, この章の補遺 B に従って,

$$\pi_2(G/SO(n)) = \pi_1(SO(n)) = Z_2 \tag{23.2.9}$$

となる. この場合 Z_2 の元 -1 に対応してただ 1 種類の「単極子」が存在し, それは対でしか消滅できない. この場合と, $SO(n)$ をその単連結被覆群 $Spin(n)$ で置き換えた場合とを区別することは重要だ. 後者の場合は単極子は存在しない. この点は次節の終わりで再度考察する.

別の例としてはスカーミオンがある. 前節で見たように n 個の軽いクォークを含む量子色力学のスカーミオンは $\pi_3(SU(n))$ の元に対応し, このホモトピー群は補遺 B に従えば Z だ. したがってこれらのスカーミオンは整数値の保存量子数 ν を持ち, それはおそらくバリオン数と同定することができる. 同様に, 前節で述べたように単純ゲージ群 G に基づくゲージ理論でのインスタントンは $\pi_3(G)$ の元に対応し, このホモトピー群は補遺 B に従えば Z だ. したがってこれらのインスタントンはスカーミオンと同様に整数値の量子数 ν を持ち, この量子数も巻付き数と呼ばれる. 23.5 節でこの量子数をゲージ場の局所的な汎関数として表す方法を見る.

23.3 磁気単極子

トポロジー的に自明でない場の配位の詳しい例として, ここではト・フーフトとポリアコフ (Polyakov) の磁気単極子[2] およびその一般化を考察する. 23.1 節で見たように単連結ゲージ群 G が電磁理論の $U(1)$

に自発的に破れるとき, 有限エネルギーの配位は群 $\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$ の元に従って分類される. (単連結でないリー群の場合についてはこの節の最後に考察する.) 23.2 節で述べたホモトピー群の物理的解釈に従うと, このことはこれらの配位が保存する可算的な量子数を持つことを意味する. しかし, これらの停留的配位が実際に存在することを示し, そのトポロジーの量子数の物理的意味を与えることはやはり必要だ.

具体例として, (ジョージャイ・グラショウの電弱模型[12]のような) $SU(2)$ ゲージ群が 3 重項のスカラー場 ϕ_n の真空期待値によって自発的に破れている理論を考える. (この場合なぜゲージ群が $SO(3)$ ではなく $SU(2)$ なのかはこの節の最後に説明する.) ミンコフスキー時空でのスカラーとゲージ場のラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\, F_{n\,\mu\nu}F_n^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, D_\mu\phi_n D^\mu\phi_n - V(\phi_n\phi_n) \tag{23.3.1}$$

ととる. ここで,

$$F_{n\,\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{n\,\nu} - \partial_\nu A_{n\,\mu} + e\,\epsilon_{nml}A_{m\,\mu}A_{l\,\nu}\ , \tag{23.3.2}$$

$$D_\mu\phi_n \equiv \partial_\mu\phi_n + e\,\epsilon_{nml}A_{m\,\mu}\phi_l \tag{23.3.3}$$

で, 関数 $V(\phi_n\phi_n)$ は正で, $\sqrt{\phi_n\phi_n}$ のゼロでない値 $\langle\phi\rangle$ (正にとる) でゼロになると仮定する. (磁気単極子の多くの研究では V は $\lambda > 0$ の 4 次多項式 $\lambda(\phi_n\phi_n - \langle\phi\rangle^2)^2$ にとるが, ここではこの仮定はしない.) (23.3.1) は時空に依存しない $A_{n\mu} = 0$ の真空解を持つ理論を記述する. その解では $\phi_n\phi_n = \langle\phi\rangle^2$ を満たす真空期待値 ϕ_n により $SU(2)$ は部分群 $U(1)$ に破れるが, これは電磁理論のゲージ群と見なすことができる. ここではその解ではなく, トポロジー的に自明でない非一様なしかし時間には依らない時間的ゲージでの古典解を探す. このゲージでは $A_n^0 = 0$ だが $A_n^i \neq 0$ だ. この場合のラグランジアン密度はポ

テンシャル・エネルギー密度 $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{4}\, F_{n\,ij}^2 + \tfrac{1}{2}\, (D_i\phi_n)^2 + V(\phi) \qquad (23.3.4)$$

に負符号を付けたもので与えられる. ここで 2 乗は添字の明白な縮約を含む. (23.3.4) の各項は正なので, 有限エネルギーの配位では各項の積分は個別に収束しなければならない.

特に, $V(\phi_n\phi_n)$ の積分が収束するためにはベクトル ϕ_n は無限遠で固定された長さ $\langle\phi\rangle$ を持たねばならない. よって有限エネルギーの各配位は, 磁気単極子の配位を囲む大きな 2 次元球面 $\mathcal{S}$ から $\phi_n\phi_n = \langle\phi\rangle^2$ を満たす ϕ_n の 2 次元球面への写像を定義する. $\hat{\mathbf{x}}$ が $\mathcal{S}$ 全体を動くとき, ϕ_n は球面 $\phi_n\phi_n = \langle\phi\rangle^2$ 全体を任意の整数 N 回だけ動くことができる. その際ヤコビアン $\mathrm{Det}\,(\partial x/\partial\phi)$ が正なら巻付き数は N だと言い, 負なら巻付き数は $-N$ だという.

巻付き数が磁気単極子モーメントとどう関係しているかを見るためには, まずこの理論で「磁場」として観測されるのものは何かを考えなければならない. 場の配位がどの様であろうと, 任意の与えられた有限領域でスカラー場 ϕ_n がある決まった方向, 例えば 3 方向を向き, したがってこの領域では $SU(2)$ の破れていない $U(1)$ 部分群に付随するゲージ場は A_{3i} となるゲージを導入できる. ト・フーフト[2] はこのゲージでは通常の電磁場の強度テンソル $\partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu}$ になるゲージ不変なテンソル $\mathcal{F}_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv F_{n\mu\nu}\hat{\phi}_n - \frac{1}{e}\epsilon_{nml}\,\hat{\phi}_n\, D_\mu\hat{\phi}_m\, D_\nu\hat{\phi}_l \qquad (23.3.5)$$

を見つけた. ここで $\hat{\phi}_n \equiv \phi_n/\sqrt{\phi_m\phi_m}$ と定義している. $\hat{\phi}_n$ が定数のゲージでは $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ が通常の電磁場の強度テンソルだということを確かめるために(また後で使う目的で), (23.3.2) と (23.3.3) と恒等式 $\epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$ を使って $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ を,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu(\hat{\phi}_n A_{n\nu}) - \partial_\nu(\hat{\phi}_n A_{n\mu}) - \frac{1}{e}\epsilon_{nml}\,\hat{\phi}_n\,\partial_\mu\hat{\phi}_m\,\partial_\nu\hat{\phi}_l \qquad (23.3.6)$$

の形に書いておく.[13] すると $\hat{\phi}_n$ が 3 方向の固定単位ベクトルのゲージでは, 予定どおり,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu}$$

が得られる.

任意の局所的な場の配位の磁気単極子モーメント g はその配位を囲む大きな閉曲面 $\mathcal{S}$ を貫く磁束の $1/4\pi$ 倍, すなわち,

$$4\pi g \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{ij}\, d^2 S_k \tag{23.3.7}$$

と定義される. (23.3.6) の $\mathcal{F}_{ij}$ の最初の 2 項は微分項なので積分 (23.3.7) には寄与しない. したがって,

$$g = -\frac{1}{8\pi e}\epsilon_{ijk}\epsilon_{nml}\int_{\mathcal{S}} \hat{\phi}_n\, \partial_i\hat{\phi}_m\, \partial_j\hat{\phi}_l\, d^2 S_k \tag{23.3.8}$$

となる.

これはトポロジー不変量だという重要な性質を持つ. 必要なところで部分積分をして, $\hat{\phi}_n$ の微小な変化 $\delta\hat{\phi}_n$ に対する g の変化は,

$$\delta g = -\frac{3}{8\pi e}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{nml}\int_{\mathcal{S}} \delta\hat{\phi}_n\, \partial_i\hat{\phi}_m\, \partial_j\hat{\phi}_l\, d^2 S_k$$

となることがわかる. しかし $\hat{\phi}$ は単位ベクトルなので, $\delta\hat{\phi}$, $\partial_i\hat{\phi}$, $\partial_j\hat{\phi}$ は全て $\hat{\phi}$ に垂直な平面内にあるので,

$$\epsilon_{nml}\,\delta\hat{\phi}_n\, \partial_i\hat{\phi}_m\, \partial_j\hat{\phi}_l = 0$$

が成り立ち, よって $\delta g = 0$ だ. 量 (23.3.8) は**クロネッカー指数** (Kronecker index) と呼ばれるトポロジー不変量と関係している.

g は表面積分なので可算的だ. つまり, 任意の二つの離れた局所的な配位の場合, g を計算するために使う表面 $\mathcal{S}$ は, 各々の配位をそれぞれ 1 個の球面が囲みそれらの間は細い頸状部で連結するようにと

れるので, 系全体の g の値は個々の局所的配位についての g_1 と g_2 の値の和だ. さらに, g はトポロジー不変量なので, 磁気単極子モーメント g_1 と g_2 を持つ二つの配位の滑らかな融合によって作られるどのような場の配位についても $g = g_1 + g_2$ が成り立つ. g は巻付き数に比例しなければならないことがわかる. 荒船, フロイント (Freund), ゲーベル (Goebel)[13] はこれを証明し, 一般の巻付き数について式 (23.3.8) を使って比例係数を計算した. ここでは単純に場が単位巻付き数を持つト・フーフトとポリアコフの磁気単極子[2] を調べて, 係数を計算する.

前節で見たように, $\pi_2(SU(2)/U(1))$ の「恒等」元 $\mathcal{I}$ (単位元ではない) は, Z の元「1」に対応するが, これは無限遠の 2 次元球面 $\mathcal{S}$ が $\hat{\phi}_n$ で記述される球面に (正のヤコビアンで) 1 回だけ写像される配位から成る. このホモトピー類の代表元として, 無限遠で ϕ_n が $\mathbf{x}$ と同じ方向を持つ配位をとることができる. この配位を構成するために, $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ と $\mathbf{x}$ の同時回転のもとでの対称性とパリティの保存を課して,

$$\phi_n = \hat{x}_n \langle\phi\rangle F(r)\ , \tag{23.3.9}$$

$$A_{ni} = \frac{\epsilon_{nil}\hat{x}_l}{er} G(r) \tag{23.3.10}$$

を仮定する. この場の配位と超伝導体の渦糸の場の配位との間には重要な類似性がある. 21.6 節で見つけた渦糸中のゴールドストン・ボゾン場の解 $\phi = \pm\ell\varphi/2e$ は, ゲージ不変性と回転不変性は自発的に破れているが, 渦糸解は大域的ゲージ変換 $\phi \to \phi + \Lambda$ と回転 $\varphi \to \varphi \pm 2e\Lambda/\ell$ の組み合わせのもとで不変だということを示している. 同様に, (23.3.9)–(23.3.10) の形の磁気単極子解は回転またはゲージ変換のもとでは不変でないが, 3 次元空間の回転とそれに等しい大域的 $SO(3)$ ゲージ変換の組み合わせのもとで不変だ.

すでに述べたように, $V(\phi_n\phi_n)$ の積分が収束するためには $\phi_n\phi_n$ は $r \to \infty$ で $\langle\phi\rangle^2$ に近づく必要があり, したがってこの極限で $F(r) \to 1$

だ. 同じ極限での $G(r)$ の振舞いを導くには, スカラー場の共変微分は,

$$D_i\phi_n = \pm\langle\phi\rangle\left[\Big(1-G(r)\Big)\Big(\delta_{ni}-\hat{x}_n\hat{x}_i\Big)\frac{F(r)}{r}+\hat{x}_n\hat{x}_iF'(r)\right] \tag{23.3.11}$$

で, よってハミルトニアン密度の項は,

$$\tfrac{1}{2}\left(D_i\phi_n\right)^2 = \langle\phi\rangle^2\left[\frac{F^2(1-G)^2}{r^2}+\frac{F'^2}{2}\right] \tag{23.3.12}$$

だという点に留意する. これが積分して有限になるには $r\to\infty$ で $G(r)\to 1$ と $F'(r)\to 0$ も必要だ. 最後に, 場の強度 (23.3.2) は,

$$F_{n\,ij} = \frac{\epsilon_{ijk}}{e}\left[-\frac{1}{r}G'(r)\Big(\delta_{nk}-\hat{x}_n\hat{x}_k\Big)-\frac{1}{r^2}\Big(2G(r)-G^2(r)\Big)\hat{x}_n\hat{x}_k\right] \tag{23.3.13}$$

となるので, ハミルトニアン密度のヤン・ミルズ項は,

$$\tfrac{1}{4}\left(F_{nij}\right)^2 = \frac{1}{e^2}\left[\frac{G'^2}{r^2}+\frac{(2G-G^2)^2}{2r^4}\right] \tag{23.3.14}$$

となる. $G'(r)$ が $r\to\infty$ で十分速くゼロになる限り, この積分は遠距離で収束する.

これらの結果を使ってこの配位の磁気単極子モーメントを計算できる. (23.3.13) と極限 $G(\infty)=1$ および $G'(\infty)=0$ から $r\to\infty$ で,

$$F_{nij}\to -\frac{\epsilon_{ijk}\hat{x}_k\hat{x}_n}{er^2} \tag{23.3.15}$$

となる. $D_i\phi_n$ は $r\to\infty$ で急激にゼロになるので, このゲージの場の強度テンソルの磁気部分は $r\to\infty$ で (23.3.5) の第 1 項で与えられ, よって遠距離では磁場は,

$$B_i \equiv \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\mathcal{F}_{jk}\to\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\hat{\phi}_nF_{njk}\to -\frac{\hat{x}_i}{er^2} \tag{23.3.16}$$

となる. よって, この配位は磁気単極子モーメント $g=-1/e$ を持つ. 上の一般的な議論から, 巻付き数 ν を持つ配位の磁気モーメントは, Z の元 ν に対応して,

$$g_\nu = -\nu/e \tag{23.3.17}$$

となる.

ハミルトニアン密度 (23.3.4) の積分を最小にする安定な配位を見つけるには詳細な数値計算が必要だ. しかしある極限の場合には解析解が存在する. これを見るには, まず与えられた磁気単極子モーメント g についてボゴモルニ[10]による単極子エネルギーの一般的な下限を導くことが有用だ. (23.3.4) は,

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{4}\left(F_{n\,ij} \mp \epsilon_{ijk} D_k \phi_n\right)^2 \pm \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} F_{n\,ij} D_k \phi_n + V(\phi_n \phi_n) \quad (23.3.18)$$

と書き換えることができる. ビアンキの恒等式 (15.3.9) を使うと第 2 項は,

$$\pm\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{n\,ij} D_k \phi_n = \pm\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} D_k \left(F_{n\,ij}\phi_n\right) = \pm\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_k\left(F_{n\,ij}\phi_n\right)$$

となるので, その積分は磁気単極子モーメント g を使って,

$$\pm\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\int d^3x\; F_{n\,ij} D_k \phi_n = \pm\langle\phi\rangle\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \pm 4\pi\langle\phi\rangle g$$

と表すことができる. $\mathcal{H}$ のその他の項はすべて正なので, 磁気単極子モーメント g を持つ配位のエネルギーの一般的な下限が以下のように得られる.

$$E = \int d^3x\,\mathcal{H} \geq 4\pi\langle\phi\rangle|g|\,. \quad (23.3.19)$$

$g = \pm 1/e$ の場合, これよりエネルギー $E \geq 4\pi\langle\phi\rangle/e$ が得られるが, 結合定数 e が小さい場合にはそれはせいぜい $\langle\phi\rangle$ の程度の大きさの量子揺らぎによる補正よりはるかに大きい. これが, そのような古典的配位を摂動展開の主要項として真面目にとることができる理由だ.

ここで, (23.3.18) の第 1 項がゼロになるように,

$$F_{n\,ij} = \pm\,\epsilon_{ijk} D_k \phi_n \quad (23.3.20)$$

と置くことで, 与えられた磁気単極子モーメントを持つ配位のエネルギーを最小にしようという誘惑に駆られるが, しかし一般にこれでは

エネルギーが停留する配位は得られない．スカラー場の変分についてエネルギーが停留する条件は場の方程式，

$$D_kD_k\phi_n = 2\phi_n V'(\phi_n\phi_n) \tag{23.3.21}$$

だが，(23.3.20) はビアンキ恒等式 (15.3.9) と合わせると $D_kD_k\phi_n = 0$ となる．この議論は，$V(\phi_n\phi_n)$ が非常に小さい特別な場合には，条件 (23.3.20) を課すことで下限値 (23.3.19) にほとんど到達し，したがって与えられた磁気単極子モーメントについてエネルギーを最低にするすることが可能なことを示唆している．(V が 4 次の多項式 $\lambda(\phi_n\phi_n - \langle\phi\rangle^2)^2$ のときには，V が小さいという仮定は第 1 種超伝導体のように $\lambda \ll e^2$ を意味する.) そのような安定な配位はこのやり方でボゴモルニ[10]によって研究された．この配位はプラサド (Prasad) とゾマーフェルト (Sommerfeld)[14] によりそれ以前に (23.3.20) を直接使わずに見出されていたので，通常 **BPS 単極子**と呼ばれる．

ボゴモルニの条件 (23.3.20) は $F(r)$ と $G(r)$ について 1 次の微分方程式を与えるが，これはエネルギーが停留する条件から直接導かれた 2 次の場の方程式に比べてはるかに容易に解くことができる．(23.3.11) と (23.3.13) を使うと，(23.3.20) の $\epsilon_{ijk}[\delta_{kn} - \hat{x}_k\hat{x}_n]$ と $\epsilon_{ijk}\hat{x}_k\hat{x}_n$ に比例する項からそれぞれ，

$$e\langle\phi\rangle F(1-G) = G' \ , \tag{23.3.22}$$

$$e\langle\phi\rangle r^2 F' = G(2-G) \tag{23.3.23}$$

が得られる．$r \to \infty$ で $F(r) \to 1$ および $G(r) \to 1$ という境界条件を課すと，これらの方程式は，

$$F = \coth\rho - \frac{1}{\rho} \ , \qquad G = 1 - \frac{\rho}{\sinh\rho} \tag{23.3.24}$$

の解を持つ．ここで $\rho \equiv e\langle\phi\rangle r$ だ．特に，(23.3.9) と (23.3.24) で与えられる場 ϕ_n は $r \to 0$ でゼロになるので，23.1 節で述べたように単極子の中心では $SU(2)$ 対称性は回復している．

次にポテンシャル V が任意の強さの場合に戻ろう. ト・フーフト・ポリアコフの単極子は, さらに小さなトポロジー量子数を持つ配位が崩壊先として存在しないので, 安定だ. もっと大きな磁気単極子モーメントを持つ配位は一般に不安定だ.[10] また**ダイオン** (dyon)[15] と呼ばれる, 磁気単極子モーメントと電荷の両方を持つ興味深い配位も存在する.

ト・フーフト・ポリアコフの磁気単極子モーメントの値 $1/e$ を理解する別の方法もある. それは磁気単極子に関するディラックの元々の研究[16] に遡る. すでに述べたように, 今まで使ってきたゲージの代わりに, ϕ_n を固定した方向 $\hat{\mathbf{v}}$, 例えば 3 方向を向くように回転するゲージ変換 $\phi_n \to R_{nm}(\mathbf{x})\phi_m$ を施すことができる. すると場の強度 $B_{nk} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{nij}$ は $R_{nm}B_{mk}$ に変換され, それは $r \to \infty$ で $\hat{\mathbf{v}}_n\hat{x}_k/er^2$ に近づく. したがって, この場合にはこれを局所的な破れていない対称性の方向に射影する必要はない. この便利さの代償は, ゲージ変換が特異なことだ. $\hat{\mathbf{x}}$ 方向のベクトルをある固定した方向 $\hat{\mathbf{v}}$ に移す回転は,

$$
\begin{aligned}
R(\hat{\mathbf{x}};\hat{\mathbf{v}}) = 1 &- \left(1 - \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{x}}\right)\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T \\
&+\hat{\mathbf{v}}\left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}\right)^T + \left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}\right)\hat{\mathbf{v}}^T \\
&-\frac{\left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}\right)\left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}\right)^T}{1+\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{v}}}
\end{aligned}
\tag{23.3.25}
$$

で与えられるが, これは $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{v}}$ で特異だ. この R は一意的ではない. 例えば, $\hat{\mathbf{x}}$ を $-\hat{\mathbf{v}}$ 方向へ移す回転 $R(\hat{\mathbf{x}};-\hat{\mathbf{v}})$ を施した後, $\hat{\mathbf{v}}$ に垂直なある軸のまわりに 180° 回す固定回転をとることも可能だが, しかしこれは $\hat{\mathbf{x}} = +\hat{\mathbf{v}}$ で特異だ. この特異性を避けるには, 異なる領域では異なるゲージを採用する必要がある. 例えば $\hat{\mathbf{v}}$ を 3 方向として, $0 < \theta < \theta_0$ では $\theta = \pi$ で特異なゲージを使い, $\theta_0 < \theta < \pi$ では $\theta = 0$ で特異なゲージを使う. ここで θ_0 は $0 < \theta_0 < \pi$ を満たす任意の角

で, $\pi/2$ に採ることが多い. $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ 以外のあらゆる場所で磁場は遠距離で $B \to g\hat{\mathbf{x}}/r^2$ で与えられる. ここで g は磁気単極子の強さだ. これは方位角 φ 方向の成分のみがゼロでないベクトル・ポテンシャルの回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ として書くことができる. $0 < \theta < \theta_0$ では $A_\varphi = g(1 - \cos\theta)/r \sin\theta$ と採らなければならないがこれは $\theta = \pi$ でだけ特異だ. また $\theta_0 < \theta < \pi$ では $A_\varphi = -g(1 + \cos\theta)/r \sin\theta$ と採らなければならないがこれは $\theta = 0$ でだけ特異だ. これら二つのベクトル・ポテンシャルの差 $\Delta\mathbf{A}$ は, $\Lambda = 2g\varphi$ として勾配 $\boldsymbol{\nabla}\Lambda$ だ. これはもちろん $0 < \theta < \pi$ では磁場には影響がないが, 荷電場の力学には影響しうる. $\Lambda = 2g\varphi$ のゲージ変換は電荷 q を持つ場を $\exp(2iqg\varphi)$ の因子だけ変えるが, それは $2qg$ が整数でなければ 1 価ではない. これはディラックの量子化条件だ. すなわち, 単極子モーメント g を持つ任意の磁気単極子の存在は, 全ての電荷が $(2g)^{-1}$ の整数倍であることを要求する. ト・フーフト・ポリアコフ単極子の場合には, $g = 1/e$ なので, この条件は自動的に満たされており, ジョージャイ・グラショウ模型の全ての電荷は $e/2$ の整数倍になっている.

ジョージャイ・グラショウ模型は中性カレントの発見により電弱相互作用の理論としては排除された. しかし磁気単極子は, 単連結群 G が $U(1)$ にではなく, ある部分群 $H' \times U(1)$ に自発的に破れているような他の理論で生じることが期待される. ただし H' は単連結群だ. (この章の補遺 B によれば, 単連結群 G については $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ であり, $H = H' \times U(1)$ の場合には, それは $\pi_1(H') \times \pi_1(U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$ に等しい.) 標準的な電磁理論のゲージ群 $SU(2) \times U(1)$ は単連結ではないので, その自発的破れでは磁気単極子は生成されない. (これについては, 以下でさらに触れる.) しかし, $SU(4) \times SU(4)$, $SU(5)$ あるいは $Spin(10)$ のような強い相互作用と電弱相互作用の統一理論の単連結ゲージ群 G が標準模型のゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に自発的に破れるときには磁気単極子が観測される. (21.5 節を見よ.) こ

の場合の磁気単極子は, この対称性の破れによって生成されるベクトル中間子の質量 $M \approx 10^{15}$ – 10^{16} に比べてゲージ結合定数の逆 2 乗だけ大きな質量を持つと期待される. そのような磁気単極子は, 宇宙が M の程度の温度 T で, G が自発的に $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に破れる相転移を受けたときに生成されたであろう.

これはある種の宇宙模型では問題を引き起こす.[17] この相転移以前のスカラー場は, 最初の特異点以来光が進むことのできた最長距離である地平線距離より長い距離では必然的に相関がなかったと考えられる. 標準的な宇宙論[18]の初期の時刻 t では地平線距離は $t \approx (G_N T^4)^{-1/2}$ の程度なので (ここで $G_N \simeq (10^{19}\ \text{GeV})^{-2}$ はニュートン定数だ), この時刻に生成される磁気単極子の個数密度は $t^{-3} \approx (G_N M^4)^{3/2}$ の程度だったと考えられるが, これは $T \approx M$ での光子密度 M^3 より $(G_N M^2)^{3/2}$ の因子だけ小さい. $M \approx 10^{15}$ GeV の場合にこの因子は 10^{-12} の程度だ. もし単極子同士が遭遇して消滅することがなければ, この比は現在までほとんど一定のままであろうが, 核子当たり少なくとも 10^9 個のマイクロ波背景光子が存在するので, このことから核子当たり少なくとも 10^{-3} 個の磁気単極子が存在することになるが, それは観測事実とは著しく異なっている. この深刻な矛盾はインフレーション宇宙模型[19]が導入される要因の一つであった. その模型では, 指数関数的な膨張の時期が存在し, それが磁気単極子が生成される以前であれば地平線を大きく拡げたであろうし, 磁気単極子が生成された後であれば (再加熱の期間よりは前だとして) 単極子密度を大きく薄めたであろう.

どんな種類の単極子が発見されても, それは分数フェルミオン数を持つフェルミオン・磁気単極子配位の存在[20]やフェルミオン・磁気単極子散乱におけるバリオン数保存の破れ[21]を含む注目すべき現象を観測する機会を生み出すだろう.

* * *

これまでの議論では単連結ゲージ群 G の自発的破れにともなう磁気単極子のみを考察してきた．これは一つの疑問を生じさせる．あらゆるリー群 G には，単連結か否かにかかわらず，同じリー代数を持ちその群の**被覆群**と呼ばれる単連結群 $\overline{G}$ が存在する．(例えば2.7節を見よ.) 任意の非単連結群が持つ表現はその被覆群より少ない．(例えば，2重連結群 $SO(n)$ はスカラー表現，ベクトル表現およびテンソル表現のみを持つが，その被覆群 $Spin(n)$ はスピノル表現も持つ.) もし理論が被覆群で付け加わる表現に属する場をたまたま含まないなら，理論のゲージ群が非単連結群 G だと考えるのかその被覆群 $\overline{G}$ だと考えるのかは自由だろうか? 特に，どのような磁気単極子が可能かは，理論が非単連結群 G の表現として変換する場のみを含むか，その被覆群 $\overline{G}$ だけの表現になっている付加的な場を含むかに依存するのだろうか? 例えば，元々のジョージャイ・グラショウ模型[12]では唯一のスカラー場は $SO(3)$ の表現である3元ベクトルに属していたが，被覆群 $Spin(3) = SU(2)$ のスピノル表現に属するフェルミオンが存在した．磁気単極子モーメントの許される値は，もし $SU(2)$ のスピノル表現に属するスカラー場を付け加えれば変化しただろうか? またフェルミオンを取り除けば変わっただろうか?

答は，どのような磁気単極子が可能かはゲージ群が非単連結群 G だというかその被覆群 $\overline{G}$ だというかには依らず，したがって $\overline{G}$ の表現に属し G の表現には属さない場を加えたり除いたりしても影響を受けないということだ．23.1節で見たように，一般にトポロジー的に安定な単極子的な配位は $\pi_2(G/H)$ の元に従って分類される．この章の補遺Bで引用した結果によると，このホモトピー群は，H が G に埋め込まれたときの $\pi_1(G)$ の自明な元に対応する $\pi_1(H)$ の元から成る．しかしもし G をその被覆群 $\overline{G}$ で置き換えれば，H も他の部分群 H' に置き換えることになる．なぜなら，H が $\overline{G}$ に埋め込まれると H の

いくつかの閉曲線は基点に戻らないからだ．これらは H が G に埋め込まれたとき自明にはならない閉曲線なので, $\pi_2(G/H) = \pi_1(H')$ だ．したがって磁気単極子に関する限りゲージ群は G ではなくて $\overline{G}$ だと言ってもよい．

例えば, スカラー場に関する限り, ジョージャイ・グラショウ模型のゲージ群は2 重連結群 $SO(3)$ であってその単連結被覆群 $SU(2)$ ではないと考えるかもしれない．すると破れていない部分群は $SO(2)$ だが, その場合 360° 回転だけ異なる変換を同一視する．したがって $\pi_1(SO(2))$ は単位元から 360° 回転に至る閉曲線を含み, それは $SO(3)$ が $SU(2)$ に埋め込まれたときには閉曲線ではなくなる．しかし $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ は $\pi_1(SO(2))$ と同じではなく, $SO(3)$ が $SU(2)$ に埋め込まれるとホモトピー的に自明でない閉曲線を排除する．それはちょうど単位元から 360° 回転に至る閉曲線だ．したがって $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ は $SU(2)$ の部分群 $U(1)$ となり, これはあたかもゲージ群を最初から $SU(2)$ にとったのと同じだ．

任意の半単純ゲージ代数にともなうゲージ群 G はいつでも単連結被覆群だと考えるのが便利だ．そうすると $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ という単純な結果を使うことができる．すると, 今見たように, H の連結性は G への埋め込み方, もっと正確には, H のリー代数の G のリー代数への埋め込み方で決まる．例えば, $SU(3)$ ゲージ代数は$SU(3)$ の基本表現が 2 重項と 1 重項の和として変換する$SU(2)$ 部分代数に自発的に破れるかもしれないし, $SU(3)$ の基本表現が 3 元ベクトルとして変換する $SO(3)$ 部分代数に破れるかもしれない．1 番目の場合には破れていない部分群が $SO(3)$ だと考える選択肢はない．なぜなら $\pi_1(SU(2)) = 0$ なのでこの場合は磁気単極子が存在しないからだ．2 番目の場合は破れていないゲージ群は $SU(2)$ ではなく $SO(3)$ と見なさなければならないので, 理論は実際に磁気単極子的な配位を持ち, それは $\pi_1(SO(3)) = Z_2$ の元に従って分類される．H の破れていない

部分代数の性質とそのゲージ代数 G への埋め込み方はラグランジアンに導入する場の多様な型の力学的影響を受けるかもしれないが, H の代数と G の代数への埋め込み方が一度確定すると, どのような磁気単極子が可能かは理論に含まれる場の多様性の影響を全く受けない.

特に, ディラックの量子化条件に導いた議論が示すように, リー代数 G が電荷の演算子を含む部分代数に破れる任意の理論では, 許される磁気単極子モーメントは G の被覆群の表現に現れる最も小さな電荷の逆数の整数倍だ. このことは, その電荷を持つ粒子が理論に実際に存在するか否かには依らない. G 自身の代数が $U(1)$ 生成子を含むなら, この $U(1)$ の被覆群を考えなければならない. それは実線に沿って平行移動する非コンパクト群だ. この $U(1)$ 生成子が, 標準的な電磁理論のように, 電荷の演算子の項の一つとして現れるなら, 被覆群の表現に最小の電荷は存在せず, したがって磁気単極子は存在しない.

23.4 カルタン・マウレルの積分不変量

しばしば多様体には, その上の積分として書くことができるトポロジー不変量が存在し, これは種々のコンパクトな多様体のトポロジーを理解する上で大いに役立つ. これは次の節でのインスタントンの議論で重要になるし, すでに 19.8 節と 22.7 節でヴェス・ズミノ・ウィッテン項を調べたときにも使った.

座標 $\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^d$ を持つ奇数次元 d の任意のコンパクトな多様体 $\mathcal{S}$ から $\mathrm{Det}\, g \neq 0$ を満たす行列 $g(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^d)$ の多様体 $\mathcal{M}$ への写像を考える. (ここで関心のある応用では, 通常 $\mathcal{S}$ は球面 $\mathcal{S}_d$ で g はリー群 G のある表現の元だ.) **カルタン・マウレル形式** (Cartan–Maurer form) と呼ばれる $g(\theta)$ の汎関数,

$$\mathcal{I}[g] = \int d\theta^1\, d\theta^2 \cdots d\theta^d\, \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d}$$

$$\times \operatorname{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_1}}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_2}}\cdots g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}\right\} \quad (23.4.1)$$

を定義する. ここで $\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}$ は $\epsilon^{12\cdots d}=1$ の完全反対称量だ. $\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}=-(-1)^d\epsilon^{i_2\cdots i_d i_1}$ という事実から, $\mathcal{S}$ が偶数次元のときは $\mathcal{I}[g]$ はゼロなので, ここでは d が奇数のときに限定する. この量の有用性はそのいくつかの注目すべき性質から来ている.

第 1 に, この量は多様体 $\mathcal{S}$ をパラメータ化するのに使った座標系には依らない. これは $\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}$ が,

$$\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}\frac{\partial\theta'^{j_1}}{\partial\theta^{i_1}}\frac{\partial\theta'^{j_2}}{\partial\theta^{i_2}}\cdots\frac{\partial\theta'^{j_d}}{\partial\theta^{i_d}}=\operatorname{Det}\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)\epsilon^{j_1 j_2\cdots j_d}$$

の意味で反変テンソル密度だという事実からかなり明白だ.

第 2 に, 積分 (23.4.1) はまた写像 $\mathcal{S}\mapsto\mathcal{M}$ の小さな変形のもとでも不変だ. トレースの性質を使うと, 関数 $g(\theta)$ の微小な変化 $g\to g+\delta g$ のもとで, (23.4.1) のどの因子 $g^{-1}\partial g/\partial\theta^i$ の変化も $\mathcal{I}[g]$ の変化に,

$$\delta\mathcal{I}[g]=\int d\theta^1\,d\theta^2\cdots d\theta^d\;\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}$$
$$\times \operatorname{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_1}}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_2}}\cdots\delta\left(g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}\right)\right\}$$

だけの同じ寄与をすることがわかる. ここでトレースの最後の因子は,

$$\delta\left(g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}\right)=-g^{-1}(\theta)\,\delta g(\theta)\,g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}+g^{-1}(\theta)\frac{\partial\delta g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}$$
$$=g^{-1}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta^{i_d}}\left(\delta g(\theta)g^{-1}(\theta)\right)g(\theta)$$

となる. 部分積分すると, 微分 $\partial/\partial\theta^{i_d}$ は偏微分 $\partial g(\theta)/\partial\theta^{i_n}$ にかかるとき $\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}$ の反対称性のために寄与がゼロになる. $\partial/\partial\theta^{i_d}$ が $g^{-1}(\theta)$ にかかる残りの $d-1$ 個の項は交互に変わる符号を除いて全て等しく, したがって偶数個あるそれらの項を足し上げるとゼロになる.

最後に, $\mathcal{S}$ が球面 S_d の場合に限定しよう. $\mathcal{I}[g]$ は $g(\theta)$ の小さな変化について不変なので, それは $g(\theta)$ が属するホモトピー類 c のみの

関数 $\mathcal{I}(c)$ と見なせる. 積分 $\mathcal{I}(c)$ (厳密には $\exp\{\mathcal{I}(c)\}$) は,

$$\mathcal{I}(c_a \times c_b) = \mathcal{I}(c_a) + \mathcal{I}(c_b) \tag{23.4.2}$$

の意味でホモトピー群 $\pi_d(\mathcal{M})$ の表現になっている. (もし $g_a(\theta)$ と $g_b(\theta)$ がそれぞれホモトピー類 c_a と c_b の元なら, ホモトピー類 $c_a \times c_b$ は,

$$g_{ab}(\theta) = \begin{cases} g_a(2\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_d) & 0 \le \theta_1 \le \frac{1}{2} \\ g_b(2\theta_1 - 1, \theta_2 \cdots \theta_d) & \frac{1}{2} \le \theta_1 \le 1 \end{cases}$$

にホモトピー同値な写像から成る. 積分 $\mathcal{I}[g_{ab}]$ の $0 \le \theta_1 \le 1/2$ の半球面上と $1/2 \le \theta_1 \le 1$ の半球面上の部分は変数をそれぞれ $\theta_1' = 2\theta_1$ と $\theta_1' = 2\theta_1 - 1$ に変えることにより実行でき, (23.4.2) の項 $\mathcal{I}(c_a)$ と $\mathcal{I}(c_b)$ が得られる.)

特に, これはホモトピー類 $e, c, c \times c, \cdots$ および $c^{-1}, c^{-1} \times c^{-1}, \cdots$ が,

$$\mathcal{I}(c^n) = n\,\mathcal{I}(c) \tag{23.4.3}$$

の性質を持つことを意味する. もしある c について $\mathcal{I}(c) \neq 0$ なら, これらの不変量は全て異なり, よって類 c^n は全て異なり, したがって $\pi_d(\mathcal{M})$ の部分群 Z を形成する. このことは, この章の補遺 B で示す奇数次元と偶数次元のホモトピー群の大きさが非常に異なることをうまく説明する. 例えば, $\pi_1(U(1)) = Z$, 全ての単純リー群 G について $\pi_3(G) = Z$, 全ての $n \ge 3$ について $\pi_5(SU(n)) = Z$ だが, 一方全てのリー群 G について, $\pi_2(G) = 0$ で $\pi_4(G)$ は有限だ.

$\mathcal{I}(c) \neq 0$ の簡単な例としてホモトピー群 $\pi_1(U(1))$ を考えよう. これは前節の最初に例として使った群 $\pi_1(S_1)$ と同じだ. 任意の写像 $S_1 \mapsto U(1)$ は座標 θ が S_1 を回る間に$U(1)$ の元の位相が S_1 を反時計方向に回る回数からS_1 を逆方向に回る回数を引いた数 ν で特徴付けることができ, 二つの写像は等しい ν を持つなら, またそのときに限りホモトピー同値だ. ν 次の類は $0 \le \theta \le 1$ とする写像

$g_\nu(\theta) = \exp(2i\nu\pi\theta)$ を含み，それについては,

$$\mathcal{I}[g_\nu] = \int_0^1 d\theta \exp(-2i\nu\pi\theta)\frac{d}{d\theta}\exp(2i\nu\theta) = 2i\nu\pi$$

なので，$\pi_1(U(1)) = Z$ が証明できた.

より複雑な場合の $\mathcal{I}(g)$ を計算する手助けとして，多様体 $\mathcal{M}$ を次元 d のリー群 H に連続的に変形できるとしよう．パラメータ θ の H 変換に引き続いてパラメータ φ の H 変換を実行した結果は，例えばパラメータ $\theta'(\theta,\varphi)$ の H 変換だ．行列表示 $g(\theta)$ を用いれば，これは,

$$g(\varphi)g(\theta) = g(\theta'(\theta,\varphi))$$

と書ける．φ を固定して θ' について微分し，この方程式の逆を左からかけると,

$$\frac{\partial\theta^i}{\partial\theta'^j}\, g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^i} = g^{-1}(\theta')\frac{\partial g(\theta')}{\partial\theta'^j}$$

が得られる．したがって点 θ' での被積分関数 $\mathcal{I}[g]$ は,

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{j_1 j_2\cdots j_d}\,\mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta')\frac{\partial g(\theta')}{\partial\theta'^{j_1}}g^{-1}(\theta')\frac{\partial g(\theta')}{\partial\theta'^{j_2}}\cdots g^{-1}(\theta')\frac{\partial g(\theta')}{\partial\theta'^{j_d}}\right\}\\
&\quad= \mathrm{Det}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}\\
&\qquad\times\mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_1}}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_2}}\cdots g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}\right\}
\end{aligned}$$

となる．さて，あらゆるリー群 H は,

$$\gamma_{ij}(\theta') \equiv \frac{\partial\theta^k}{\partial\theta'^i}\frac{\partial\theta^\ell}{\partial\theta'^j}\gamma_{k\ell}(\theta) \tag{23.4.4}$$

の意味で形式不変な(必ずしも一意的ではない)計量 $\gamma_{ij}(\theta)$ を持つ．例えば,

$$\gamma_{ij}(\theta) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^i}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^j}\right\} \tag{23.4.5}$$

と採ることができる. $\gamma_{ij}(\theta)$ の任意の選び方に対して, (23.4.4) の行列式は,

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)=\sqrt{\frac{\mathrm{Det}\,\gamma(\theta')}{\mathrm{Det}\,\gamma(\theta)}}$$

となる. (23.4.1) で座標 θ を θ' で置き換えると,

$$\mathcal{I}[g]=\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}\ \mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_1}}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_2}}\cdots g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^{i_d}}\right\}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\gamma(\theta)}}\int d^d\theta'\ \sqrt{\mathrm{Det}\,\gamma(\theta')} \tag{23.4.6}$$

となる. 2 番目の H 変換のパラメータ φ は任意なので, θ と θ' を独立変数と見なすことができ, θ の任意の値, 例えば $\theta^i=0$ で (23.4.6) の右辺を評価できる. 生成子 t_i と座標 θ^i を, $\theta\to 0$ で,

$$g(\theta)\to 1+2i\theta^i t_i \tag{23.4.7}$$

となるように規格化するのが便利だ. この場合 (23.4.6) は,

$$\mathcal{I}[g]=(2i)^d\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_d}\ \mathrm{Tr}\left\{t_{i_1}\,t_{i_2}\cdots t_{i_d}\right\}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\gamma(0)}}\int d^d\theta'\ \sqrt{\mathrm{Det}\,\gamma(\theta')} \tag{23.4.8}$$

となる.

我々は $d=3$ の場合に特に関心がある. ボット (Bott)[22] は任意の単純リー群 G について, 全ての連続写像 $S_3\mapsto G$ はS_3 から G の「標準的な」$SU(2)$ 部分群への写像に連続的に変形できることを示した. ($G=SU(n)$ のとき, この標準的な $SU(2)$ 部分群は $SU(n)$ の基本表現の最初の2 成分にのみ作用する部分群だ. $SU(n)$ の全ての $SU(2)$ 部分群がこの部分群に同値なわけではない.) 2.7 節で述べたように, 2×2 表現では $SU(2)$ の一般の元は,

$$g(\theta)=\begin{pmatrix}\theta_4+i\theta_3 & \theta_2+i\theta_1\\ -\theta_2+i\theta_1 & \theta_4-i\theta_3\end{pmatrix}=\theta_4+2i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{t} \tag{23.4.9}$$

と書ける. ここで通常どおり,

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で, θ_4 と $\boldsymbol{\theta}$ は実で $(\theta_4)^2 = 1 - \boldsymbol{\theta}^2$ を満たす. ((23.4.9) は規格化の約束 (23.4.7) と整合している.) 直接の計算から計量 (23.4.5) は,

$$\gamma_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \frac{\theta_i\theta_j}{1-\boldsymbol{\theta}^2} \tag{23.4.10}$$

となり, よって,

$$\text{Det}\ \gamma(\theta) = \frac{1}{1-\boldsymbol{\theta}^2} \tag{23.4.11}$$

となることがわかる. したがって (23.4.8) はこの場合,

$$\mathcal{I}[g] = -8i\epsilon^{ijk}\ \text{Tr}\ \{t_it_jt_k\}\int \frac{d^3\theta}{\sqrt{1-\boldsymbol{\theta}^2}}$$

となる. $4t_it_j = \delta_{ij} + 2i\epsilon^{ij\ell}t_\ell$ と $\text{Tr}\,\{t_\ell t_k\} = \frac{1}{2}\delta_{\ell k}$ を使うと,

$$8\epsilon^{ijk}\ \text{Tr}\ \{t_i\,t_jt_k\} = 2i\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} = 12i$$

がわかる. また「恒等」写像 g_1 については, ここでの積分は単位球体の内部全体を 2 回動くので(これはθ_4 は正または負となることができるからだ),

$$\int \frac{d^3\theta}{\sqrt{1-\boldsymbol{\theta}^2}} = 2\int_0^1 \frac{4\pi\, r^2\, dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi^2$$

となる. すると g_1 にホモトピー同値な写像の類 c について,

$$\mathcal{I}(c) = 24\pi^2 \tag{23.4.12}$$

が得られ, したがって,

$$\mathcal{I}(c^\nu) = 24\pi^2\nu \tag{23.4.13}$$

となる．整数 ν は**巻付き数**と呼ばれる．この結果が成り立つのは，標準的な $SU(2)$ 部分代数が生成子 t_i を持ちその構造定数が ϵ_{ijk} で $\mathrm{Tr}\,(t_i t_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ という表現と規格化を採用した場合だ．もっと一般的には，$[t_i, t_j] = ig\epsilon_{ijk}t_k$ および $\mathrm{Tr}\,(t_i t_j) = \frac{1}{2}Ng^2\delta_{ij}$ とすると，

$$\mathcal{I}(c^\nu) = 24\pi^2 N\nu \tag{23.4.14}$$

となる．

ついでに言えば，(23.4.13) または (23.4.14) の結果からあらゆる単純リー群について $\pi_3(G)$ は Z を含むことがわかる．この章の補遺 B に列挙したとおり，全ての単純リー群について $\pi_3(G) = Z$ だ．このように任意の単純リー群について $g(\theta)$ のホモトピー類は，群がその標準的な $SU(2)$ 部分群に変形されたときのホモトピー類で完全に決まる．

23.5　インスタントン

23.1 節で見たように，$d = 4$ 次元のユークリッド時空で単純ゲージ群 G を持つゲージ場だけの理論のトポロジー的に自明でない解は，ホモトピー群 $\pi_3(G) = Z$ の元に対応する．これらはインスタントンと呼ばれる 4 次元の場の配位で，(次の節で議論する理由から) その揺らぎとともに経路積分に含めなければならない．ベラビン (Belavin)，ポリアコフ，シュワルツ (Schwarz)，ティプキン (Tyupkin)[1] がこれらの解の存在を示した後，ト・フーフト[23] は経路積分にこれらの配位を含めると 19.10 節で概説した $U(1)$ 問題が解決することを示した．ここではまずインスタントンそのものを議論し，次に経路積分でのそれらの役割を考察する．

(23.1.7) に従えば，トポロジー的に自明でないゲージ場が有限の作用を持つためにはゲージ場は，$r \to \infty$ (ここで $r \equiv \sqrt{x_i x_i}$ で i は 1, 2,

3, 4 の値について和をとる) で純ゲージに近づかなければならない.

$$iA_i(x) \to g^{-1}(\hat{x})\,\partial_i g(\hat{x})\ . \tag{23.5.1}$$

ここで $A_i \equiv t_\alpha A_{\alpha i}$ で $g(\hat{x})$ は方向に依存するゲージ群 G の元だ. したがって前の節で議論したトポロジー不変量はゲージ場の漸近的振舞いを用いて,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[g] \equiv &\int d\theta^1\, d\theta^2\, d\theta^3\ \epsilon^{abc}\\ &\times \mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^a}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^b}g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^c}\right\}\\ = &-i\lim_{r\to\infty} r^3 \int d\theta^1\, d\theta^2\, d\theta^3\ \epsilon^{abc}\\ &\times\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial\theta^a}\frac{\partial\hat{x}_j}{\partial\theta^b}\frac{\partial\hat{x}_k}{\partial\theta^c}\ \mathrm{Tr}\ \{A_iA_jA_k\}\end{aligned} \tag{23.5.2}$$

と書ける. ここで θ^a $(a = 1, 2, 3)$ は単位 4 元ベクトル $\hat{x}$ の方向を指定するのに使う任意の 3 個のパラメータだ. この表面積分はガウスの定理を使って評価できる. ミンコフスキー時空でのカレント (22.2.29) に類似して, ユークリッド時空でのカレントを,

$$G_l \equiv \epsilon^E_{lijk}\Big[A_{\gamma i}F_{\gamma jk} - \tfrac{1}{3}\ C_{\alpha\beta\gamma}\,A_{\alpha i}\,A_{\beta j}\,A_{\gamma k}\Big] \tag{23.5.3}$$

と定義できる. その発散は,

$$\partial_l G_l = \tfrac{1}{2}\ \epsilon^E_{ijkl}F_{\alpha ij}F_{\alpha kl} \tag{23.5.4}$$

となる. (ここで ϵ^E_{ijkl} は $\epsilon^E_{1234} \equiv 1$ を満たす完全反対称テンソルだ.) ここでは完全反対称な構造定数を持つゲージ群の表現を使っており,

$$\mathrm{Tr}\,\{t_\alpha t_\beta\} = \tfrac{1}{2}\ N\delta_{\alpha\beta} \tag{23.5.5}$$

を満たす. ここで N は (23.5.2) のトレースを計算する際の表現に依存する定数だ. したがって (23.5.3) は,

$$G_l \equiv (2/N)\,\epsilon^E_{lijk}\ \mathrm{Tr}\Big[A_iF_{jk} + (2i/3)A_i\,A_j\,A_k\Big] \tag{23.5.6}$$

と書ける. $r \to \infty$ で場の強度 F_{kl} はゼロになるので,

$$G_l \to (4i/3N)\,\epsilon^E_{lijk}\,\mathrm{Tr}\left[A_i\,A_j\,A_k\right] \tag{23.5.7}$$

と表せる. したがって (23.5.2) は,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[g] &= -(3N/4)\int(d^4x)_E\,\partial_l\,G_l \\ &= -(3N/8)\,\epsilon^E_{ijkl}\int(d^4x)_E\,F_{\alpha ij}\,F_{\alpha kl}\end{aligned} \tag{23.5.8}$$

と書ける. このようにして, トポロジー的に自明でない場の配位の存在を示すには, チャーン・ポントリアギン密度 $\epsilon^E_{ijkl}\,F_{\alpha ij}\,F_{\alpha kl}$ の積分がゼロでない配位の存在を示す必要がある.

この目的には, **ボゴモルニの不等式** (Bogomol'nyi inequality)[10] と呼ばれる不等式を利用するのが非常に有益だ. 以下の事実,

$$0 \le \int\left(F_{\alpha ij} \mp \tfrac{1}{2}\epsilon^E_{ijkl}F_{\alpha kl}\right)^2 (d^4x)_E$$

(2 乗は自明な添字の縮約を含む) から,

$$S[A] \ge \tfrac{1}{8}\left|\epsilon^E_{ijkl}\int F_{\alpha ij}\,F_{\alpha kl}\,(d^4x)_E\right| = |\mathcal{I}[g]|/3N \tag{23.5.9}$$

が得られる. ここで $S[A]$ は(因子を除いて)以下のユークリッド作用だ.

$$S[A] \equiv \tfrac{1}{4}\int F_{\alpha ij}\,F_{\alpha ij}\,(d^4x)_E\ . \tag{23.5.10}$$

(23.5.9) の下限に達するのは, 明らかにゲージ場が,

$$F_{\alpha ij} = \pm\tfrac{1}{2}\ \epsilon^E_{ijkl}\,F_{\alpha kl} \tag{23.5.11}$$

の意味で自己相対または反自己相対のときで, またそのときに限る. したがって 1 次の方程式 (23.5.11) の任意の解は巻付き数 1 のゲージ場のうち $S[A]$ の最小値を与える場だ. したがってそれはまた 2 次のヤン・ミルズ方程式の解だ.

ベラビン達[1]は (23.5.11) の解で,

$$iA_i(x) = \left(\frac{r^2}{r^2+R^2}\right) g_1^{-1}(\hat{x})\partial_i g_1(\hat{x}) \tag{23.5.12}$$

の形のものを見つけた. ここで R は任意のスケール因子で, $g_1(\hat{x})$ は,

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{x_4 + 2i\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}}{r}\right) \tag{23.5.13}$$

の形をしたゲージ群の $SU(2)$ 部分群の元だ. ただし,

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{23.5.14}$$

と定義されている.

明らかに, この解は (23.5.1) の漸近的振舞いを持ち, $g(\hat{\mathbf{x}})$ は「恒等写像」(23.4.9) と同じだ. よってこの解は恒等写像のホモトピー類に属し, したがって前の節で見たように巻付き数 $\nu = 1$ を持つ. (23.4.14) と (23.5.9) (今は等式だ) から,

$$S[A] = 8\pi^2 \tag{23.5.15}$$

となる. また (23.5.10) と (23.5.11) (正符号をとって) から,

$$\epsilon^E_{ijkl}\int F_{\alpha ij}\,F_{\alpha kl}\,(d^4x)_E = 64\pi^2 \tag{23.5.16}$$

となる. この解は平行移動やゲージ変換を施すことが可能なので一意的ではないが, これらの自由度を除いて巻付き数 1 を持つ場の方程式の解は他に無い.[24]

$\nu = 1$ の場の配位が見つかったので, 任意の整数 ν の場の配位も存在することがわかる. 例えば, ν が正の整数 $\mathcal{N}$ の解は$\nu = 1$ の $\mathcal{N}$ 個の解をそれらの中心が場の方程式の非線形性が重要でなくなるだけ遠く離して重ね合わせることで構成できる. $\nu = -1$ の解は (23.5.12)

の g_1 を g_1^{-1} で置き換えて得られ, ν が負の整数 $-\mathcal{N}$ の解はこれらの $\mathcal{N}$ 個の解を遠く離して重ね合わせれば得られる. 一般の巻付き数について, (23.5.15) と (23.5.16) は,

$$S[A] = 8\pi^2|\nu| \,, \tag{23.5.17}$$

$$\epsilon^E_{ijkl} \int F_{\alpha ij}\, F_{\alpha kl}\, (d^4x)_E = 64\pi^2\nu \tag{23.5.18}$$

となる.

以上の結果はゲージ場を (23.5.11)-(23.5.13) のように規格化した場合のものだ. この規格化では作用 $I[A]$ は $-S[A]$ ではなく,

$$I[A] = -S[A]/g^2 = -8\pi^2|\nu|/g^2 \tag{23.5.19}$$

となる. ここで g は通常の結合定数だ. 通常どおり因子 g を生成子と構造定数に含めれば, 作用 $I[A]$ は $-S[A]$ に等しいが, $A_{\alpha\mu}$ と $F_{\alpha\mu\nu}$ が因子 $1/g$ を持つので (23.5.15) の代わりに $S[A] = 8\pi^2/g^2$ となり, この場合もやはり作用は $-8\pi^2/g^2$ となるが, 今度は (23.5.18) の代わりに,

$$\epsilon^E_{ijkl} \int F_{\alpha ij}\, F_{\alpha kl}\, (d^4x)_E = 64\pi^2\nu/g^2 \tag{23.5.20}$$

となる.

次の節で見るように, 経路積分ではあらゆる巻付き数のインスタントンの効果の和をとらなければならない. 巻付き数 $\nu \neq 0$ の配位のユークリッド経路積分への寄与は, $\exp(I[A]) = \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ の因子だけ小さく抑えられる. 23.7 節で見るように, この指数関数の係数は g の負冪 $-n$ で, 量子色力学の場合 $n = 12$ だ. 関数 $g^{-n}\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ とその g についての微分は全て $g = 0$ でゼロになる. したがってそのような寄与は非摂動論的で, 摂動論のどの次数でも現れない.

このことは必ずしもこれらの寄与が小さいことを意味しない. 18 章で見たように, 量子色力学では結合 g は固定した次元のないパラメー

タではなく, エネルギー・スケールをずらしたときのそのエネルギー・スケールの関数で, 低エネルギーで大きくなる. (23.5.19) の結合定数に使われるべき有効エネルギー・スケールは量子揺らぎから決まる. これは 23.7 節の主題だが, 次元の考察から $1/R$ と大きく異なることはあり得ない. ここで R は (23.5.12) のインスタントンの大きさだ. インスタントンの大きさは固定しておらず, 考察している過程に依存するある重み関数をかけて積分する必要がある. 量子色力学では変化する結合定数 g_μ は μ が大きいとき (18.7.7) より,

$$g_\mu^2 = \frac{8\pi^2}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)}$$

で与えられる. ここで $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ で $\Lambda \approx 250$ MeV は量子色力学のスケール因子だ. したがって因子 $\exp(-8\pi^2/g_{1/R}^2)$ は小さいインスタントンの場合,

$$\exp\Big(-8\pi^2/g_{1/R}^2\Big) = \Big(R\Lambda\Big)^{\beta_0}$$

となる. この因子は $R\Lambda \gg 1$ を満たす大きいインスタントンについては計算できないが, この場合インスタントン効果が小さく抑えられないことは明らかだ.

最初の期待と異なり, インスタントンの発見は量子色力学での定量的計算の可能性を大きく改善するには至っていない. 一方, 以下で見るように, 量子色力学および他のゲージ理論の理解に目ざましい定性的な変化を生み出した.

積分 (23.5.15) がゼロでない場の方程式の解が存在する事実だけでは 19.10 節で議論した $U(1)$ 問題の解を与えるのに十分ではない. 大域的 $U(1)$ 変換 $\psi \to \exp(i\gamma_5\alpha)\psi$ のもとでクォーク場についての積分の測度は (22.2.10) で与えられる,

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to \exp\left\{i\alpha \int \mathcal{A}(x)\,(d^4x)_E\right\}[d\psi][d\bar{\psi}] \qquad (23.5.21)$$

だけの変化を受ける. ここで(行列 t は今の場合 1 に等しく)アノマリー関数 $\mathcal{A}(x)$ は (22.2.45) すなわち

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon^E_{ijkl}\,F_{ij\,\alpha}\,F_{kl\,\beta}\,\mathrm{tr}\,t_\alpha t_\beta \tag{23.5.22}$$

で与えられる. このアノマリーの存在はそれだけでは $U(1)$ 問題を解決しない. なぜなら (23.5.22) の量は全微分なので, 無限遠で十分速くゼロになる特異性のないゲージ場の場合には積分はゼロになる. インスタントン解は $1/r$ の振舞いでゼロになるだけであり, (23.5.22), (23.5.18), (23.5.5) よりこの積分に,

$$\int (d^4x)_E\,\mathcal{A}(x) = 2N\nu \tag{23.5.23}$$

のゼロでない値を生じさせる. このことはアノマリーが $U(1)$ カイラル対称性を実際に破ることを示している.

22.4 節で見たように, バリオン数とレプトン数のカレントもクォークおよびレプトンと標準模型の $SU(2)\times U(1)$ ゲージ場との相互作用によるアノマリーを含む. したがって $SU(2)$ ゲージ場のインスタントン配位はバリオン数とレプトン数の保存則の破れを引き起こす.[25] 22.4 節で見たように, バリオン数とレプトン数の差や電子, ミュー中間子, タウ・レプトン数の差のようにアノマリーやその他のものにより保存則が破れていない様々なカレントが存在するので, これらはバリオン数とレプトン数を保存しない過程で保存する. 例えば, 陽子や重陽子の崩壊は禁止されるが, $\mathrm{He}^3 \to e^+ + \mu^+ + \bar{\nu}_\tau$ の崩壊は許される. これらの効果の振幅は上記と同じ因子 $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ で抑えられるが, 今の場合は g は $SU(2)$ 結合定数 $e/\sin\theta$ で, ずらすスケールではなく電弱過程の自然なスケールすなわちほぼ m_Z の程度のスケールで評価される. $e^2/4\pi = 1/129$ (18.2 節を見よ) および $\sin^2\theta = 0.23$ ととると, $|\nu| = 1$ の場合の抑制因子は $\exp(-373)$ だ. したがって He^3 が 3 個の反レプトンに崩壊することは観測されそうもない.

* * *

インスタントンの特徴を解明する別の方法がある.[26] $A_{\alpha 4}(\mathbf{x}, x_4) = 0$ の時間的ゲージでは, $x_4 \to \pm\infty$ でのゲージ場は時間に依存しない純ゲージ,

$$i\mathbf{A}(\mathbf{x}, x_4) \equiv it_\alpha \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}, x_4) \to g_\pm^{-1}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla} g_\pm(\mathbf{x}) \tag{23.5.24}$$

に近づくと期待される. ここで $g_\pm(\mathbf{x})$ は t_α で生成される表現での群の元だ. $\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}, x_4)$ は $\mathbf{x} \to \infty$ でゼロになると仮定すると, 群の元 $g_\pm(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \to \infty$ で定数 $g_\pm$ に近づかなければならないので, $x_4 \to \infty$ の 3 次元空間は, 無限遠点を通常の点と見なして, 3 次元球面と見なせる. (23.4.13) を導いたのと同じ議論をすれば,

$$\epsilon_{ijk} \int d^3x \; \mathrm{Tr} \left\{ g_\pm^{-1}(\mathbf{x})\, \partial_i g_\pm(\mathbf{x})\, g_\pm^{-1}(\mathbf{x})\, \partial_j g_\pm(\mathbf{x})\, g_\pm^{-1}(\mathbf{x})\, \partial_k g_\pm(\mathbf{x}) \right\} = 24\pi^2 n_\pm \tag{23.5.25}$$

が得られる. ここで $n_\pm$ は整数だ. (23.5.2) の 4 次元空間の境界上の積分は「平面」 $x_4 = +\infty$ 上の積分と「平面」 $x_4 = -\infty$ 上の積分の差と見なすことができ, したがって (23.5.8) と (23.5.18) から ($N = 1$ として),

$$\nu = n_+ - n_- \tag{23.5.26}$$

となる. よって (23.5.19) から得られる指数関数の因子 $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ は, $x_4 \to -\infty$ での空間的な巻付き数 n_- の配位から $x_4 \to +\infty$ での空間的な巻付き数 n_+ の配位への遷移振幅と見なせる. $\nu \neq 0$ の場合にこの因子が指数関数の形をしている点は, これがトンネル過程だという事実を反映している. つまり 1 連の連続的な純ゲージ場によってある空間的な巻付き数の配位から異なる空間的な巻付き数の配位に移行することはできない.

因子 $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ をトンネル現象の振幅とする解釈は, バリオン数とレプトン数を保存しない過程が約 1 TeV 以上の温度で急激に進行する可能性を示唆している. その際には障壁をトンネル現象によりくぐる必要はなく, 熱的な揺らぎにより真空から障壁を乗り越えることが可能となる.[27] この過程は宇宙論的に重要かもしれないが, やはり上述の選択則は有効で, 熱的揺らぎはバリオン数密度とレプトン数密度の差や3 種類のレプトン数密度の差を変えない.

23.6　θ 角

すでに見たように任意の整数の巻付き数を持つ配位が存在するが, これらの配位を経路積分に取り入れねばならないかどうかはどうすれば知ることができるだろう. 先入観を避けるために, 各々の巻付き数について任意の重み因子 $f(\nu)$ をかけて配位を足し上げるとする. その際, これらの重み因子のいくつかまたはほとんどがゼロという可能性を残しておく. すると大きなユークリッド時空体積 Ω 内に位置する局所的な観測量 $\mathcal{O}$ の期待値は,

$$\langle \mathcal{O}\rangle_\Omega = \frac{\sum_\nu f(\nu)\ \int_\nu [d\phi] \exp\Big(I_\Omega[\phi]\Big)\mathcal{O}[\phi]}{\sum_\nu f(\nu)\ \int_\nu [d\phi] \exp\Big(I_\Omega[\phi]\Big)} \tag{23.6.1}$$

で与えられる. ここで ϕ は理論のすべての場を表し, ϕ についての積分に付した添字 ν は巻付き数 ν の配位のみを含めることを意味する. また $I_\Omega[\phi]$ はラグランジアン密度の時空体積 Ω にわたる積分だ. ここで Ω を二つの非常に大きな体積 Ω_1 と Ω_2 に分割し, $\mathcal{O}$ は体積 Ω_1 に含まれるようにする. 巻付き数 ν を持つすべての場についての積分は, 体積 Ω_1 内の巻付き数が ν_1 で体積 Ω_2 内の巻付き数が ν_2 のすべての場について積分し ν_1 と ν_2 は $\nu_1 + \nu_2 = \nu$ を満たす全ての値につ

いて和をとったもので表せるので, (23.6.1) はよい近似で,

$$
\langle \mathcal{O} \rangle_\Omega = \frac{\sum_{\nu_1,\nu_2} f(\nu_1+\nu_2) \int_{\nu_1}[d\phi] \exp\Big(I_{\Omega_1}[\phi]\Big)\mathcal{O}[\phi] \int_{\nu_2}[d\phi] \exp\Big(I_{\Omega_2}[\phi]\Big)}{\sum_{\nu_1,\nu_2} f(\nu_1+\nu_2) \int_{\nu_1}[d\phi] \exp\Big(I_{\Omega_1}[\phi]\Big) \int_{\nu_2}[d\phi] \exp\Big(I_{\Omega_2}[\phi]\Big)} \tag{23.6.2}
$$

となる. しかしすると一般の重み因子については平均は体積 Ω_2 を省略したときと同じではなく, これはクラスター分解原理に関する一般的な考え方と矛盾する. (4 章を見よ.) この比において体積 Ω_2 を含む因子が相殺するには,

$$
f(\nu_1+\nu_2) = f(\nu_1) f(\nu_2)
$$

が満たされなければならない. これが成り立つのは $f(\nu)$ が,

$$
f(\nu) = \exp(i\theta\nu) \tag{23.6.3}
$$

の形のときで, またそのときだけだ. ここで θ は自由なパラメータだ. したがって特にゼロでない巻付き数の配位を全て勝手に無視することはできない. なぜなら, そうするとある領域で巻付き数 ν のインスタントンはどこか他の領域で巻付き数 $-\nu$ のインスタントンと釣り合うようにしなければならず, 演算子を測定する位置から遠く離れた場所で起こっている事を考慮しないと期待値を計算できなくなるからだ.

因子 $f(\nu)$ はもっと馴染みのある形に書き換えることができる. (23.5.18) によれば, 標準的な $SU(2)$ 部分群での構造定数が ϵ_{ijk} になるようにゲージ場が規格化されているとき, 巻付き数は積分,

$$
\nu = \frac{1}{64\pi^2} \int (d^4x)_E \, \epsilon^E_{ijkl} \, F_{\alpha ij} \, F_{\alpha kl} \tag{23.6.4}
$$

と書ける. これはミンコフスキー経路積分で表せる. $(d^4x)_E = i\, d^4x$;

$F_{\alpha 34} = -iF_{\alpha 30}$; $\epsilon^{1230} = -1$ より, (23.6.4) は,

$$\nu = -\frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma} \tag{23.6.5}$$

と書ける. したがって重み因子 (23.6.3) を含めることは,

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\theta}{64\pi^2}\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma} \tag{23.6.6}$$

をラグランジアン密度に付け加えることと同等だ. しかし 15.2 節の最初に述べたように, どの非可換ゲージ理論のラグランジアンにも任意の実の θ を持つそのような項をとりあえず含めることはできた.

ラグランジアン密度に (23.6.6) の項を含めると P と CP の保存が破れる. もちろん単純に $\theta = 0$ と置くこともできたが, これは 18.7 節で量子色力学の成功の一つとして数えられた事柄, すなわち, P と CP は弱い相互作用によって明らかに破られているが強い相互作用によって保存されることは量子色力学では自動的に保証されるという点を無効にする.

ラグランジアン項 (23.6.6) を含めることの物理的帰結を評価するために, 全てのフェルミオン場の再定義,

$$\psi_f \to \exp(i\gamma_5\alpha_f)\psi_f \tag{23.6.7}$$

の効果を考察する. ここで f はフレーバーの添字で, α_f は実位相の組だ. (22.2.10) と (22.2.24) によれば, フェルミオン場の経路積分の測度への効果は,

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to \exp\left\{\frac{-i}{32\pi^2}\int d^4x\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} \sum_f \alpha_f\right\}[d\psi][d\bar{\psi}] \tag{23.6.8}$$

となる. (ここでは $\mathrm{Tr}\,(t_\alpha t_\beta) = \delta_{\alpha\beta}/2$ と規格化された生成子を使っている.) これと (23.6.6) との比較から, これは θ を,

$$\theta \to \theta + 2\sum_f \alpha_f \tag{23.6.9}$$

とずらすことと同等だ. フェルミオン場の再定義はまたラグランジアン密度の質量項も変化させる. γ_5 を含む質量を考慮するために, ラグランジアンのフェルミオン質量項を,

$$\mathcal{L}_m = -\tfrac{1}{2} \sum_f \mathcal{M}_f \bar{\psi}_f (1+\gamma_5)\psi_f - \tfrac{1}{2} \sum_f \mathcal{M}_f^* \bar{\psi}_f (1-\gamma_5)\psi_f \quad (23.6.10)$$

と書こう. ここで質量パラメータ $\mathcal{M}_f$ は, もし複素数なら, P と CP の保存を破る. 再定義 (23.6.7) はこれらのパラメータを,

$$\mathcal{M}_f \to \exp(2i\alpha_f)\mathcal{M}_f \quad (23.6.11)$$

だけ変化させる. 経路積分変数の単なる変換はどのような物理的効果も生じさせることはできないので, 観測量は θ と質量パラメータ $\mathcal{M}_f$ の位相に別々に依存できず,

$$\exp(-i\theta) \prod_f \mathcal{M}_f \quad (23.6.12)$$

の組み合わせにだけ依存できる. 特に, $\theta = 0$ となるようにフェルミオン場を定義することは常に可能だが, それはおそらく質量パラメータに P と CP を破る位相を導入するという犠牲を払うことになる.

この議論から, もしクォークの質量がゼロなら θ 角は効果を及ぼさず, 量子色力学では P と CP の非保存は起こらないことがわかる. 19.7 節のクォークの質量比の解析は, 全てのクォークはゼロでない質量を持つことを示している. ただし m_s の 2 次の項を含めると m_u がゼロも許されるという示唆もある.[28] しかし u クォークと d クォークは非常に軽いことは疑いなく, そのことは θ 角がゼロでないことによる効果を小さくする. 19.4 節で見たように m_u と m_d はほぼ m_π^2/m_N の程度なので (ここで m_N は量子色力学の典型的な質量スケールとして使う), θ 角の効果は m_π の 4 乗の因子だけ小さくなっていると期待できる. ただしこれは全く正しいというわけではない. P と CP が保存し

ていなければ, π^0 が真空に消えるゼロでない振幅が存在しそれは m_π^4 に比例するが, パイ中間子の線が真空に遷移する頂点で終わる「タッドポール」ダイアグラムはパイ中間子のプロパゲーターからの m_π^{-2} の因子だけ大きくなり, 全体の効果としては m_π^4 ではなく m_π^2 に比例する. 特に, 全ての $\mathcal{M}_f$ が実となるようにフェルミオン場を定義すると, ゼロでない θ 角は, P と T を保存しない中性子の電気双極子モーメント d_n を生じさせる. その大きさは $|\theta|$ と m_π^2 に比例するので, 次元の考察から,[29]

$$d_n \approx |\theta| e m_\pi^2 / m_N^3 \approx 10^{-16} |\theta| \, e \text{ cm} \tag{23.6.13}$$

となる. 中性子の電気双極子モーメントは $10^{-25}\, e$ cm より小さいことが知られているので, $|\theta| < 10^{-9}$ が得られる.

θ がそのように小さい理由を自然に説明するために, ペッチェイ (Peccei) とクイン (Quinn)[30] は, θ が実効的な力学変数となり, P と CP を保存する有効ポテンシャルの最小点に落ち着く理論を提案した. ウィルチェックと私[31] は彼らの考え方を引き継ぎ, それは軽いスピン・ゼロ粒子すなわち**アクシオン** (axion) の存在を要求することを示した. ペッチェイとクインの元々の模型に現れるアクシオンは実験で退けられたが, 通常の物質とアクシオンとの結合が弱すぎてアクシオンが観測できないようなもっと一般的な可能性[32] も存在する.

全ての種類のアクシオン理論に共通の特徴として, ある $U(1)$ 対称性が存在する. この対称性は量子色力学にともなうエネルギーよりもはるかに高いエネルギーで自発的に破れており, またグルーオン場を含むアノマリーによっても破れている. 19 章と 22 章の一般的な形式に従うと, 低エネルギー有効場理論はゴールドストン・ボゾン場 ϕ を含み, 対称性変換,

$$\phi \to \phi + F_\phi \epsilon \tag{23.6.14}$$

のもとで有効ラグランジアンは,

$$\delta\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{\epsilon A}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha^{\mu\nu}F_\alpha^{\rho\sigma} \tag{23.6.15}$$

と変換する. ここで A はアノマリーを特徴付ける次元のない 1 の程度の定数で, F_ϕ は(ϕ が正準規格化されているとして) 対称性が自発的に破れているエネルギー・スケールの程度の定数だ. すると ϕ を含む有効ラグランジアンの項は,

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{64\pi^2}\frac{\phi}{M}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha^{\mu\nu}F_\alpha^{\rho\sigma} + \cdots \tag{23.6.16}$$

となる. ここで $M \equiv F_\phi/A$ で「$\cdots$」は ϕ の微分を含む可能な相互作用を表す. (23.6.16) と (23.6.6) を比べると, 定数 ϕ について全ての観測量は ϕ と θ の別々の関数ではなく, $\theta+\phi/M$ だけの関数だということがわかる. (これは質量パラメータ $\mathcal{M}_f$ が全て実となるようにフェルミオン場が定義されているときのことで, そうでなければ観測量は $\theta - \sum_f \text{Arg}\mathcal{M}_f + \phi/M$ に依存する.) もしこの理論で θ 項 (23.6.6) と ϕ 相互作用 (23.6.16) 以外の全てが P と CP を保存するなら, 有効ポテンシャルは $\theta+\phi/M$ について偶で, したがってそれは $\theta+\phi/M=0$ で停留点を持ち, P と CP の両方を保存する. 実際の世界では P と CP の保存は厳密ではないが, 観測される唯一の破れは弱い相互作用のもので, ϕ の期待値を $-M\theta$ からわずかだけ[33] ずらす.

基礎にある理論を特定しなくても, 有効場理論の手法を用いてアクシオンの一般的性質についてかなりの事が言える. アクシオン場 ϕ の最も一般的なラグランジアンは, θ 項と u クォークおよび d クォークとの $1/M$ の次数までの全ての相互作用を含めて,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi = &-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{64\pi^2}\left[\frac{\phi}{M}+\theta\right]\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha^{\mu\nu}F_\alpha^{\rho\sigma}\\ &-\frac{if_u}{M}\partial_\mu\phi\,\bar{u}\gamma_5\gamma^\mu u - \frac{if_d}{M}\partial_\mu\phi\,\bar{d}\gamma_5\gamma^\mu d\end{aligned} \tag{23.6.17}$$

の形をしている. ここで f_u と f_d は次元のない結合定数で, 1 の程度の大きさと期待される. (23.6.8) に示されたように, クォーク場の再定義 (23.6.7) はラグランジアン (23.6.17) の第 2 項 の $\phi(x)/M+\theta$ を,

$$\frac{\phi(x)}{M}+\theta \to \frac{\phi(x)}{M}+\theta+2\Big[\alpha_u(x)+\alpha_d(x)\Big] \tag{23.6.18}$$

で置き換える効果がある. $\alpha_f=-(\theta+\phi/M)c_f/2$ と選び定数係数 c_f が $c_u+c_d=1$ を満たすようにすると, ラグランジアンの $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha^{\mu\nu}F_\alpha^{\rho\sigma}$ を含む項は消去され, 低エネルギーでの量子色力学のラグランジアン密度の質量項は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m=-m_u\,\bar{u}\exp\Big[-ic_u(\theta+\phi/M)\gamma_5\Big]u\\ -m_d\,\bar{d}\exp\Big[-ic_d(\theta+\phi/M)\gamma_5\Big]d\end{aligned} \tag{23.6.19}$$

に変わる. さらにクォーク・ラグランジアンの運動項から微分相互作用項,

$$\tfrac{1}{2}\,ic_u\,(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5)u\,\partial_\mu\phi/M+\tfrac{1}{2}\,ic_d\,(\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5)d\,\partial_\mu\phi/M \tag{23.6.20}$$

が引き出されるので, (23.6.17) の f_u と f_d は $f'_u=f_u-c_u/2$ と $f'_d=f_d-c_d/2$ で置き換わる. 低エネルギー・パイ中間子とアクシオンの有効相互作用を導くには, 19.5 節の手順に従い以下の置き換えをする. (ただしここでは陽子と中性子の代わりに u クォークと d クォークをとる.)

$$\begin{aligned}&\bar{u}u\to v\cos(\pi^0/F_\pi)\,, && \bar{d}d\to v\cos(\pi^0/F_\pi)\,,\\ &\bar{u}\gamma_5u\to iv\sin(\pi^0/F_\pi)\,, && \bar{d}\gamma_5d\to -iv\sin(\pi^0/F_\pi)\,,\\ &i\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5\to\tfrac{1}{2}\,F_\pi\partial^\mu\pi^0+\cdots\,, && i\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5\to\tfrac{1}{2}\,F_\pi\partial^\mu\pi^0+\cdots\,.\end{aligned} \tag{23.6.21}$$

ここで v は定数 $v=\langle\bar{u}u\rangle=\langle\bar{d}d\rangle$ で「$\cdots$」は 1 パイ中間子の極を持たない項を表す. (23.6.19) と (23.6.20) から有効パイ中間子・アクシオ

ン相互作用は,

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \left(\frac{f'_u - f'_d}{2M}\right) F_\pi \partial_\mu \phi' \partial^\mu \pi^0$$
$$-m_u v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} - \frac{c_d \phi'}{M}\right) - m_d v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} + \frac{c_d \phi'}{M}\right) \tag{23.6.22}$$

となる. ここで ϕ' はアクシオン場とその期待値の差,

$$\phi' \equiv \phi - \langle\phi\rangle = \phi + M\theta \tag{23.6.23}$$

だ. c_u と c_d は $c_u + c_d = 1$ の条件を除いて任意なので, $c_u = \frac{1}{2} + f_u - f_d$ および $c_d = \frac{1}{2} + f_d - f_u$ ととって $f'_u = f'_d$ とすることで $\partial_\mu \phi \partial^\mu \pi^0$ の交差項を取り除くことは自由だ. ラグランジアン (23.6.22) の 2 次の部分は,

$$\mathcal{L}_{\rm quad} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pi^0 \\ \phi' \end{pmatrix}^T M_0^2 \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \phi' \end{pmatrix} \tag{23.6.24}$$

となる. ここで,

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} (m_u + m_d)\, v/F_\pi^2 & (-m_u c_u + m_d c_d)\, v/F_\pi M \\ (-m_u c_u + m_d c_d)\, v/F_\pi M & (m_u c_u^2 + m_d c_d^2)\, v/M^2 \end{pmatrix} \tag{23.6.25}$$

と定義した. $M \gg F_\pi$ での M_0^2 の固有値の一つは $(m_u + m_d)\, v/F_\pi^2$ で, これは (19.7.20) に従えば π^0 質量の 2 乗だ. するともう一つの固有値は以下のアクシオン質量だ.

$$m_a^2 = \frac{v}{M^2}\frac{m_d m_u}{m_d + m_u} = \frac{F_\pi^2}{M^2}\frac{m_d m_u}{(m_d + m_u)^2} m_\pi^2 \,. \tag{23.6.26}$$

19.7 節で導いたクォーク質量比の場合, これは $m_a = 13\ {\rm MeV}/M({\rm GeV})$ を与える.

この形式を使ってアクシオンのハドロンとの相互作用についても論じることができる. M_0^2 の固有値 m_a^2 を持つ固有ベクトルは元々の π^0 方向に $(m_u c_u - m_d c_d)F_\pi/(m_u + m_d)M$ の成分を持つ. すでに述べたように, 1 パイ中間子極のためにこれは主要なアクシオン・ハドロン結合だ. アクシオンとパイ中間子の生成相互作用振幅の比は典型的には F_π/M の程度であることがわかる. そのような衝突でアクシオンが観測されないという事実は $M > 3$ TeV を示しており, これは, 電弱 $SU(2) \times U(1)$ 対称性を破る 0.3 TeV 程度のスカラーの真空期待値と同じ真空期待値によって, アノマリーを有する $U(1)$ 対称性が自発的に破れるという, 元々の期待[30,31] とは矛盾する. M は独立なパラメータ[32] で電弱対称性の破れのスケールよりはるかに大きなスケールと取ることで, アクシオンが原子炉や加速器の実験で見つからない理由を説明することは可能だが, さらに宇宙物理学からの制限も存在する. 赤色巨星の冷却率に関する制限から[34] $M > 10^7$ GeV が得られ, また超新星 SN1987A の観測は[35] $M > 10^{10}$ GeV を示している.* 宇宙論の議論からは上限[36] $M < 10^{12}$ GeV が示唆され, 許されるアクシオンの質量には開いているが狭い窓が残されている.

23.7 拡がった場の配位のまわりの量子揺らぎ

インスタントンのようなトポロジー的に自明でない 4 次元の場の配位は経路積分へのゼロ次の寄与しかしない. したがって, これらの

*$M > 10^7$ GeV の場合には, アクシオン質量は 1 eV 以下と考えられるので, 星はアクシオンを生成するのに十分なだけ熱い. アクシオンと π^0 の 2 光子への崩壊率の比は $(F_\pi/M)^2$ 程度の因子と $(m_a/m_\pi)^3$ 程度の位相空間の比との積, すなわち,

$$\frac{\Gamma(a \to \gamma + \gamma)}{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + \gamma)} = \left(\frac{F_\pi}{M}\right)^2 \left(\frac{m_a}{m_\pi}\right)^3 \approx \left(\frac{F_\pi}{M}\right)^5$$

と期待される. したがって $M > 10^7$ GeV の場合, アクシオンの寿命は約 10^{24} 秒より長いと期待され, これはアクシオンが崩壊するまでに宇宙論的な距離さえも飛行するのに十分な時間だ.

配位のまわりの量子揺らぎの効果を考慮しなければならない.

非常に一般的な形で始めるために, 場の組をまとめて $\phi(x)$ と記し, その力学はユークリッド作用 $I[\phi]$ で記述されるとし, また $I[\phi]$ を停留させる配位の組 $\phi_{\nu,u}$ があるとする. ここで ν はその配位のトポロジーの型の添字で, u はその配位が依存する連続的な集団パラメータを表す. 例えば, インスタントンの場合には, ν は巻付き数を表す整数で, u は位置と大きさおよびゲージ群内での「方向」を含む. するとユークリッド経路積分は,

$$\int [d\phi]\, \exp\Big(I[\phi]\Big)\mathcal{O} = \sum_{\nu} \int du \int_{u} [d\phi']\, \exp\Big(I[\phi_{\nu,u} + \phi']\Big)\mathcal{O} \quad (23.7.1)$$

と書ける. ここで揺らぎ ϕ' に関する積分に付いている添字は, 集団パラメータの変化に相当しない揺らぎのみについて積分することを表し, $\mathcal{O}$ は場の演算子の局所関数の任意の積を表す. $I[\phi]$ は $\phi = \phi_{\nu,u}$ で停留するので, その揺らぎについて 2 次の展開は,

$$I[\phi_{\nu,u} + \phi'] \simeq I_{\nu} - \tfrac{1}{2} \int d^4x\, d^4y\, K_{xl,ym}(\nu, u)\, \phi'_l(x)\, \phi'_m(y) \quad (23.7.2)$$

の形をとる. ここで l と m はスピンと場の種類の添字を含み, 作用は場の配位 $\phi_{\nu,u}$ の全てで停留するので $I_{\nu} \equiv I[\phi_{\nu,u}]$ は ν のみの関数だ. すると (23.7.1) の揺らぎ ϕ' についての積分は, $\mathcal{O}$ の中の場の縮約から来る項の和と (実ボゾン場の場合には) 全体にかかる因子 $[\mathrm{Det}\ K(\nu, u)]^{-1/2}$ との積を生じる. K はここでは集団パラメータ u の変化に相当しない揺らぎの部分空間でのみ作用すると理解する. この因子は「行列」 $K(\nu, u)$ の固有値 $\lambda_n(\nu, u)$ 全体にわたる積,

$$\Big(\mathrm{Det}\ K(\nu, u)\Big)^{-1/2} = \prod_{n}{}' \lambda_n^{-1/2}(\nu, u) \quad (23.7.3)$$

と書ける. ここでプライムは, 「ゼロ・モード」すなわち K のゼロ固有値は除くことを表す. このゼロ・モードの固有関数は集団パラメータの変化に対応する.

上記のことから, 23.5 で与えた異なる巻付き数を持つインスタントンの寄与の結合定数依存性の結果をより正確にすることが可能だ. 作用が $I[\phi, g] = g^{-2} I_1[\phi]$ の形をとるように理論の場を定義しよう. ここで $I_1[\phi]$ は結合定数には依らない. (例えば, 15.2 節の最後で議論したように, ヤン・ミルズ理論ではゲージ場として正準規格化されたゲージ場と因子 g との積を使う.) すると全ての K の固有値は g^{-2} に比例し, 因子 (23.7.3) は g を K のゼロでない固有値の数に等しい回数だけかけたものに比例する. この冪数はもちろん無限大だが, K の全ての固有値の数(それもまた無限大だが ν には依らない) からゼロ・モードの数 $\mathcal{N}(\nu)$ すなわち集団パラメータの数(これは有限で ν に依存する)を引いたものだ. したがって, ν に依存しない因子を除いて, トポロジーの型 ν の配位のまわりの揺らぎの寄与は, 集団パラメータの数 $\mathcal{N}(\nu)$ を用いて,

$$g^{-\mathcal{N}(\nu)} \tag{23.7.4}$$

の因子で与えられる結合定数依存性を持つ. この評価は (23.7.2) の近似に基づいているが, これは 1 ループ近似に対応するので, 高次項を考慮すると因子 (23.7.4) には g の冪級数がかかるが, その詳細は経路積分に現れる演算子 $\mathcal{O}$ に依存する.

これがインスタントンにどのように当てはまるかを見てみよう. $\nu = 0$ の配位はもちろん集団パラメータを持たないので, 経路積分への寄与は g の冪級数だ. $\nu = 1$ の配位はインスタントンの時空位置を与える 4 個の集団パラメータと, インスタントンの大きさを与える 1 個の集団パラメータと, インスタントンを不変に保つ回転と大域的ゲージ群変換に対応する集団パラメータの数 N_1 を持つので, ((23.5.19) で与えられる因子 $\exp(I_\nu)$ を含めて) $\nu = 1$ のインスタントンの場合の結合定数依存性は $g^{-5-N_1} \exp(-8\pi^2/g^2)$ だ. $SU(2)$ ヤン・ミルズ理論の $\nu = 1$ のインスタントン (23.5.12) の場合, 3 個の独立な回転と 3

個の独立な $SU(2)$ 変換があるが, インスタントンは回転と $SU(2)$ 変換の三つの組み合わせのもとで不変なので, $N_1 = 3$ だ. したがって $\nu = 1$ のインスタントンのまわりの揺らぎからは $g^{-8}\exp(-8\pi^2/g^2)$ の結合定数依存性が生じる. $SU(3)$ ヤン・ミルズ理論では3 個の独立な回転と 8 個の独立な $SU(3)$ 変換があるが, この場合もインスタントンは回転と (例えば $SU(3)$ の基本表現の最初の 2 成分に作用する) 標準的な $SU(2)$ 部分群での $SU(3)$ 変換との独立な 3 個の組み合わせのもとで不変で, さらに(ハイパー・チャージのように)標準的な $SU(2)$ 部分群の全ての生成子と交換する 1 個の別の $SU(3)$ 変換のもとでも不変だ. したがって $N_1 = 3+8-3-1 = 7$ となり, $\nu = 1$ のインスタントンは $g^{-12}\exp(-8\pi^2/g^2)$ に比例する因子を生じる.

次に作用 I が独立なフェルミオン場 ψ と $\bar{\psi}$ を含む,

$$-\int d^4x \int d^4y\, \bar{\psi}_l(x)\, \mathcal{K}_{lx,my}(\nu, u)\, \psi_m(y)$$

の項も含んでいるとする. これらの場が $\mathcal{O}$ に全く現れなければ, これらの場についての積分は $\mathrm{Det}\,\mathcal{K}(\nu, u)$ の因子を生じ, それは $\mathcal{K}(\nu, u)$ が 1 個でもゼロ・モードを持てばゼロになる. この結果はフェルミオン・パラメータについての積分の規則から簡単に理解できる. $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ を $\mathcal{K}$ の固有モードで展開して, $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ についての積分をこれらの展開の係数についての積分で書くことができる. ゼロ・モードの係数は作用の 2 次近似では現れないので, そのようなフェルミオンの各ゼロ・モードに関して被積分関数には現れないフェルミオン・パラメータについての積分があり, それは 9.5 節の一般則に従ってゼロになる. フェルミオン変数についての積分がゼロにならない唯一の項は, 被積分関数が各積分変数の因子を 1 個だけ含む場合だ. したがって (23.7.1) のフェルミオン場についての積分は, $\mathcal{K}$ の各ゼロ・モードについて 1 個のフェルミオン場が $\mathcal{O}$ に含まれる場合にのみゼロでない. インスタントンの場合, 存在するフェルミオンのゼロ・モードの

数とカイラリティは22.2 節で導いたアティヤー・シンガーの定理のような指数定理によって決まっているので, 与えられた巻付き数に対して許される過程は限られている. ト・フーフト[25]が, 電弱標準模型で $\nu = 1$ のインスタントンによって生じるバリオン数およびレプトン数を保存しない有効相互作用は各レプトンのフレーバーをちょうど 1 個ずつ含まなければならないということを示したのはこれに基づいている.

23.8 真空崩壊

真空状態は, スカラー場の期待値が有効ポテンシャルの真の最小点にあるなら安定だ. しかしスカラー場の期待値が真の最小点より高い極小点にあるなら, この真空は準安定だ. 極小点に対応する準安定な「偽の」真空状態は, 原子核のアルファ崩壊や自発核分裂に類似した障壁透過の過程によって真の最小点に対応する安定な「真の」真空に崩壊する. これは実験室で観測できる過程ではないが, 宇宙の歴史で様々な対称性が自発的に破れたときおそらく何回か起こったと考えられ, したがってそのような偽の真空の崩壊率を計算できることは重要だ. 以下で見るように, この計算はまた別の拡がった場の配位[6]の考察を含む.

真の真空において期待値 $\langle\phi\rangle$ を持つスカラー場多重項の成分 ϕ に注目する. 例えば, 19.5 節で述べた破れたカイラル対称性の理論では, ϕ はカイラル 4 元ベクトルの第 4 成分だ. 障壁透過が強く抑えられている場合には, それ以外のスカラー場は(どのゴールドストン・ボゾンの場も含めて)崩壊率の主要な抑制因子に影響しない. 議論を明確にするために, ラグランジアン密度を,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{23.8.1}$$

の形にとる. 最低次の有効ポテンシャル $V(\phi)$ は $\phi = \langle\phi\rangle$ で真の最小値を, また $\phi = 0$ で極小値を持ち, ラグランジアン密度の付加定数を調節して $V(0) = 0$ とする. この場合 $V(\langle\phi\rangle) < 0$ だ. 計算したいのは, スカラー場の期待値がゼロの偽の真空状態が, スカラー場の期待値が $\langle\phi\rangle$ の真の真空状態に崩壊する率だ.

この章の補遺 A の結果((23.A.6), (23.A.21), (23.A.23)) からスカラー場の期待値がゼロの偽の真空状態のエネルギー E_0 は,

$$E_0 = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[\int \exp\Big(-S[\phi;T]\Big)\prod_{\mathbf{x},t}d\phi(\mathbf{x},t)\right] \qquad (23.8.2)$$

で与えられる. ここで $S[\phi;T]$ は (23.8.1) から導かれるユークリッド作用,

$$S[\phi;T] = \int d^3x\int_{-T/2}^{+T/2}dt\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + V(\phi)\right] \qquad (23.8.3)$$

で, (23.8.2) の積分は条件,

$$\phi(\mathbf{x},T/2) = \phi(\mathbf{x},-T/2) = 0 \qquad (23.8.4)$$

を満たす全ての場 $\phi(\mathbf{x},t)$ についてとる. エネルギー (23.8.2) は複素数で, その虚部が崩壊率を与える.

(23.8.2) の汎関数積分を計算するために, ユークリッド作用 $S[\phi,T]$ の停留「点」を探す. (23.8.3) の停留点の場は場の方程式,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\phi} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \qquad (23.8.5)$$

と境界条件 (23.8.4) を満たす. これらの境界条件のために, そのような解は**バウンス** (bounce) 解と呼ばれる.

バウンス解を探すために, $\phi(\mathbf{x},t)$ は4 次元の点 $\mathbf{x}_0$, t_0 のまわりの回転のもとで不変, すなわち,

$$\phi(\mathbf{x},t) = \phi(\rho) \quad ただし \quad \rho \equiv \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2 + (t-t_0)^2} \qquad (23.8.6)$$

と仮定する．4 次元で回転不変でない解も存在するが，それらの別の解は S が高い値[37]を持つので大きな T では無視できる．(23.8.5) に (23.8.6) を使うと常微分方程式，

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho}=V'(\phi) \tag{23.8.7}$$

が得られる．厳密には，この形の解が境界条件 (23.8.4) と矛盾しないのは，T が $V(\rho)$ にともなう特徴的な時間に比べて非常に大きいときだけだが，その場合には (23.8.4) で T を無限大と取ることができ，同式は $\phi(\rho)$ が $\rho\to\infty$ でゼロにならなければいけないという条件になる．また $\phi(\mathbf{x},t)$ は $t=t_0$ を含む全ての t について $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ の近傍で $\mathbf{x}$ の解析関数でなければならないので，$\phi(\rho)$ は $\rho\to 0$ で ρ^2 の冪級数であり，特に $\rho=0$ で $d\phi/d\rho=0$ だ．これらの条件を課すと，(23.8.7) は，「時刻」ρ に「位置」ϕ をとり，位置エネルギー $-V(\phi)$ と粘性抵抗 $-(3/\rho)d\phi/d\rho$ を受けて運動する単位質量の粒子の運動方程式と解釈できる．この粒子は $\rho=0$ に静止状態で ϕ のある有限な初期値 ϕ_0 から出発し，最初の「エネルギー」 $-V(\phi_0)>0$ を経路上の粘性抵抗に奪われながら $\rho\to\infty$ にちょうど $\phi=0$ に到着する．そのような解のユークリッド作用 (23.8.3) は，

$$B\equiv\int_0^\infty 2\pi^2\rho^3 d\rho\,\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2+V(\phi)\right] \tag{23.8.8}$$

となる．B の符号を決めることは重要だ．この目的で，[38] 23.1 節でデリックの定理を証明するために使ったのと同じ技法を使って，場を $\phi_R(\rho)\equiv\phi(\rho/R)$ と変形した場合の作用 (23.8.8) を考察する．積分変数のスケールを変えると，

$$S[\phi_R]=\int_0^\infty 2\pi^2\rho^3 d\rho\,\left[\frac{R^2}{2}\left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2+R^4V(\phi)\right] \tag{23.8.9}$$

となる．$\phi(\rho)$ が (23.8.7) の解ならば，作用は ϕ のどのような変分についても停留しなければならないので，$dS[\phi_R]/dR$ は $R=1$ でゼロで

なければならず, したがって,

$$\int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 = -4\int_0^\infty \rho^3 d\rho\, V(\phi) \tag{23.8.10}$$

となる. すると,

$$B = \frac{\pi^2}{2}\int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 > 0 \tag{23.8.11}$$

が得られる. あとで $\phi(\rho)$ の陽な近似解に戻るが, まずそのような解の使い方を考察しよう.

ユークリッド作用が停留する 1 バウンス配位は一つだけでなく, 連続的に存在しそれらは $\mathbf{x}_0$ と t_0 の集団座標で特徴付けられる. 23.7 節の結果に従って, これらのパラメータについて積分する必要がある. B は $\mathbf{x}_0$ と t_0 に依らないので, この積分により空間体積 $\mathcal{V}$ の箱の中では $\mathcal{V}$ と T の因子が生じる. (23.8.2) の汎関数積分への全ての 1 バウンス配位の寄与は1 ループの次数では,

$$\mathcal{V}TA\exp(-B) \tag{23.8.12}$$

で与えられる. 係数 A は積 $\prod_n' \lambda_n^{-1/2}$ に比例する.* ここで λ_n は核 $\delta^2 S[\phi]/\delta\phi(\mathbf{x},t)\delta\phi(\mathbf{x}',t')$ の固有値で, プライムは, 集団座標 $\mathbf{x}_0$ と t_0 の変化に対応するゼロ固有値を除くことを表す. (23.8.10) を使うと, (23.8.9) の R についての 2 回微分は $R=1$ において負であることがわかるので, 少なくとも 1 個の負固有値が存在し (それは実際に 1 個だけだ[39]), したがってこの次数では A は虚数だ. ここでは A を計算することはせずに, A は $\exp(-B)$ と異なり理論のパラメータに劇的に依存することはないので次元の議論からほぼ iM^{-4} の程度だと見

*連続対称性 G が部分群 H に自発的に破れている場合, G 内での H の方向を与える別の集団座標が存在する. これらのパラメータについての積分から, A に剰余類空間 G/H の体積に等しい別の因子が生じる.

積もることができることだけを指摘しておく. ここで M は理論のある特徴的な質量スケールだ.

大きな T と $\mathcal{V}$ の場合, これらのバウンス配位を任意個数 N だけ重ね合わせて別の停留する配位を見つけることができる. その配位からは (23.8.12) の量の N 乗の寄与があるが, N 個の $\mathbf{x}_0$ と t_0 についての積分では N 個の同一のバウンスの入れ替えだけの差しかない配位にわたって足し上げてしまうことを考慮して, それを $N!$ で割る必要がある. N について和を取ると (23.8.12) の指数関数が得られるので, エネルギー (23.8.2) はちょうど (23.8.12) の量を $-T$ で割って,

$$E_0 = -\mathcal{V} A \exp(-B) \tag{23.8.13}$$

となる. A は iM^{-4} の程度なので, 偽の真空の単位体積当たりの崩壊率は,

$$\Gamma/\mathcal{V} \approx M^{-4} \exp(-B) \tag{23.8.14}$$

の程度だ. これは単位体積当たりの崩壊率だということに留意する. なぜなら崩壊は, 空間のあらゆる場所でスカラー場が同時に変化することで起こるのではなく, 偽の真空の背景中に真の真空の泡が発生することで起こるからだ.

(23.8.14) の結果は, B が大きくて障壁透過が強く抑えられており, 抑制因子を単に $\exp(-B)$ と見積もれる場合に主として有用だ. 幸い, B が大きい最も自然な状況は B を閉じた形で計算できる状況だ. これは, 真の真空のエネルギー $V(\langle\phi\rangle) \equiv -\epsilon$ が偽の真空のゼロ・エネルギーより少しだけ低いが, $V(\phi)$ は $\phi = 0$ と $\phi = \langle\phi\rangle$ の間で正で小さくない場合だ. この場合にユークリッド作用 (23.8.3) を最小にするには, ϕ を大きな半径 R の 4 次元球体の内部では $\langle\phi\rangle$ に近くとり, $\epsilon \to 0$ でのポテンシャルに特徴的なある長さ $L \approx M^{-1}$ を厚さとする半径 R の球殻内でゼロに落ちるようにとる必要がある. (これはしばしば「薄壁近似」と呼ばれるが, おそらくもっとよい表現は大泡近似だ.) この

近似での作用 (23.8.3) は,

$$S(R) \simeq -\tfrac{1}{2}\,\pi^2 R^4 \epsilon + 2\pi^2 R^3 \mathcal{S} \tag{23.8.15}$$

となる. ここで $\mathcal{S}$ は表面張力で, 作用への球殻からの単位面積当たりの寄与に等しい. (23.8.7) の左辺の第 2 項は $\rho \approx R$ では無視できるようになるので, これは本質的に 1 次元問題だ. したがって表面張力を (23.1.4) から計算でき, それは場の方程式の解については等式で, ここでの記法では,

$$\mathcal{S} = \int_0^{\langle\phi\rangle} \sqrt{2V(f)}\, df \tag{23.8.16}$$

となる. 作用 (23.8.15) は半径が,

$$R \simeq 3\mathcal{S}/\epsilon \tag{23.8.17}$$

のとき停留するので, その停留点での作用は値,

$$B \simeq \frac{27\pi^2 \mathcal{S}^4}{2\epsilon^3} \tag{23.8.18}$$

を持つ. B は ϵ が小さい場合に大きくなるので, この場合には偽の真空の崩壊率は非常に小さくなる. 障壁を透過した後は, 真の真空の泡は光速で成長し, 最終的には全ての空間が最低エネルギー状態になる.

補遺 A: ユークリッド経路積分

この補遺では場の量子論におけるユークリッド経路積分の有用性について概説する. 9.1 節で見たように, 場の量子論を 4 次元ユークリッド時空で定式化することが可能だ. この方法で S 行列要素を計算するのに必要な自明でない解析接続の議論には入らずに, ここではユークリッド経路積分を用いるのが自然な問題を提示することでその有用性を示す.

以下の交換関係を持つエルミートな正準変数の組 Q_a と P_a を考える.

$$[Q_a, P_b] = i\delta_{ab} \ , \tag{23.A.1}$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0 \ . \tag{23.A.2}$$

9.1 節と同様に, 場の量子論では添字 a は, 空間の位置 $\mathbf{x}$ と離散的なローレンツと場の種類の指標 m から成ると理解し, (23.A.1) のクロネッカーのデルタは $\delta_{\mathbf{x}m,\mathbf{y}n} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{mn}$ と理解する. Q_a の固有状態は,

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle \tag{23.A.3}$$

で定義され,

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q'-q) \equiv \prod_a \delta(q'_a - q_a) \tag{23.A.4}$$

と規格化されている. P_a の固有状態 $|p\rangle$ も同様に定義されている.

我々が考える問題は行列要素,

$$F(q', q; T) \equiv \langle q'| \exp\Big(- H[Q,P]T\Big)|q\rangle \tag{23.A.5}$$

の計算だ. ここで H はハミルトニアンで, T は任意の正の量だ. 一つの応用は基底状態のエネルギーを調べることだ. H の最小エネルギー固有値を E_0, 固有ベクトルを $|0\rangle$ とすると, $T \to \infty$ で,

$$F(q', q; T) \to \langle q'|0\rangle\langle 0|q\rangle \ \exp(-E_0 T)$$

なので,

$$E_0 = -\lim{}_{T\to\infty} \left(\frac{\ln F(q', q; T)}{T} \right) \tag{23.A.6}$$

となる. また, 統計力学の分配関数をトレース,

$$Z(\beta) \equiv \mathrm{Tr}\ \exp(-\beta H) = \int \Big[\prod_a dq_a\Big]\ F(q, q; \beta) \tag{23.A.7}$$

から計算できる. ここで $1/\beta$ は温度だ.

$F(q', q; T)$ の経路積分表示を導くために, ユークリッド時間に依存する演算子,

$$Q_a(t) \equiv e^{Ht} Q_a e^{-Ht} , \qquad P_a(t) \equiv e^{Ht} P_a e^{-Ht} \tag{23.A.8}$$

および対応する左固有状態と右固有状態,

$$|q, t\rangle \equiv \exp(Ht)|q\rangle , \qquad \langle q, t| \equiv \langle q| \exp(-Ht) , \tag{23.A.9}$$

$$|p, t\rangle \equiv \exp(Ht)|p\rangle , \qquad \langle p, t| \equiv \langle p| \exp(-Ht) \tag{23.A.10}$$

を定義する. これらの固有状態は,

$$Q_a(t)|q, t\rangle = q_a|q, t\rangle , \qquad \langle q, t|Q_a(t) = q_a\langle q, t| \tag{23.A.11}$$

と,

$$P_a(t)|p, t\rangle = p_a|p, t\rangle , \qquad \langle p, t|P_a(t) = p_a\langle p, t| \tag{23.A.12}$$

を満たす. これと通常のミンコフスキー形式との違いの一つは, 演算子の「時間」発展が非ユニタリーな相似変換 (23.A.8) で決められており, したがって $Q(t)$ の右固有状態 $\langle q, t|$ と左固有状態 $|q, t\rangle$ のエルミート共役との間に $t = 0$ 以外では簡単な関係がないことだ.

これを使うと, $F(q', q; T)$ の定義 (23.A.5) は,

$$F(q', q; T) = \langle q', T/2|q, -T/2\rangle \tag{23.A.13}$$

と書き変えることができる. まず, 微小な dt について $\langle q', t + dt|q, t\rangle$ を計算しよう. $H(Q, P)$ の全ての Q は全ての P の左側に書かれていることにすると,

$$\langle q', t + dt|q, t\rangle = \langle q', t| \exp\Big(- H(q', P)dt\Big)|q, t\rangle$$

が得られる. $|q,t\rangle$ を $P_a(t)$ 演算子の固有状態の完全系で展開する. (23.A.1) より通常どおり,

$$\langle q,t|p,t\rangle = \prod_a \frac{\exp(ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}}\ , \qquad \langle p,t|q,t\rangle = \prod_a \frac{\exp(-ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}}$$

が得られるので,

$$\langle q',t+dt|q,t\rangle = \int \left(\prod_a \frac{dp_a}{2\pi}\right) \exp\left(i\sum_a p_a(q'_a - q_a) - H(q',p)dt\right)$$

となる. (和の規則はここでは採用しない.)

9.1 節と同様に, 時間間隔 $-T/2$ から $T/2$ までを多数の非常に小さな間隔に分割し各間隔に Q の固有状態についての和を挿入する. 各間隔の Q と P の固有値の値を補間する関数 $q(t)$ と $p(t)$ を定義して, F の最も一般的な形の経路積分表示,

$$\begin{aligned} F(q',q;T) = &\int_{q(-T/2)=q,\, q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi}\right) \\ &\times \exp\left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H\Big(q(t),\, p(t)\Big)\right]\right) \end{aligned} \tag{23.A.14}$$

が得られる. 分配関数 (23.A.7) を計算するには, 以下のように $q(t)$ が温度の逆数 β に等しい周期で周期的だという条件のみを課して p と q について積分する.

$$\begin{aligned} Z(\beta) = &\int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi}\right) \\ &\times \exp\left(\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt\Big[i\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H\Big(q(t),\, p(t)\Big)\Big]\right)\ . \end{aligned} \tag{23.A.15}$$

(23.A.14) と (23.A.15) は, 指数の一方の項が実で他方の項は虚なので, 若干奇異に見える. これらの式は, $p_a(t)$ の積分を実行した後では

もっと馴染みのあるものに見える. $H(q,p)$ が p の 2 次で,

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} A_{ab}(q)p_a p_b + \sum_a B_a(q)p_a + C(q) \tag{23.A.16}$$

の形をしているという重要な場合にはこの積分は容易だ. 9 章の補遺で示したように, (23.A.14) の p 積分により,

$$\begin{aligned} F(q',q;T) = \int_{q(-T/2)=q,\,q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \left(\mathrm{Det}\left[2i\pi\mathcal{A}(q)\right]\right)^{-1/2} \\ \times\ \exp\left(\int_{-T/2}^{T/2} dt\left[i\sum_a \dot{q}_a(t)\overline{p}_a(t) - H\Big(q(t),\,\overline{p}(t)\Big)\right]\right) \end{aligned} \tag{23.A.17}$$

が得られる. ここで $\mathcal{A}(q)$ は「行列」,

$$\mathcal{A}(q)_{at',bt} = \delta(t'-t)A_{ab}(q(t)) \tag{23.A.18}$$

で, $\overline{p}(t)$ は (23.A.17) の指数関数の引数の停留「点」, すなわち方程式,

$$i\dot{q}_a(t) = \left.\frac{\delta H\Big(q(t),p\Big)}{\delta p_a}\right|_{p=\overline{p}(t)} \tag{23.A.19}$$

の解だ. この i の因子は驚くには当たらない. なぜなら (23.A.19) は非エルミート演算子 (23.A.8) が満たすのと同じ方程式,

$$i\dot{Q}_a(t) = i[H,Q_a(t)] = \frac{\delta H\Big(Q(t),P(t)\Big)}{\delta P_a(t)}$$

だからだ. ハミルトニアンが一般的な 2 次形式 (23.A.16) の場合, (23.A.19) の解は,

$$\overline{p}_a = \sum_b \left[A^{-1}(q)\right]_{ab}\Big(i\dot{q}_b - B_b(q)\Big) \tag{23.A.20}$$

なので, (23.A.17) は,

$$F(q', q; T) = \int_{q(-T/2)=q,\, q(T/2)=q'} \Big(\prod_{a,t} dq_a(t)\Big) \times \Big(\mathrm{Det}\, \Big[2i\pi \mathcal{A}(q)\Big]\Big)^{-1/2} \exp\Big(-S[q]\Big) \quad (23.A.21)$$

の形をとる. ここで $S[q]$ は以下の作用だ.

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2}\sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q)\dot{q}_a\dot{q}_b + i\sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q)B_a(q)\dot{q}_b - \frac{1}{2}\sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q)B_a(q)B_b(q) + C(q)\right]. \quad (23.A.22)$$

$B_a(q)=0$ の特別な (しかし, よくある) 場合には, これは,

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2}\sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q)\dot{q}_a\dot{q}_b + C(q)\right] \quad (23.A.23)$$

と簡単になる. したがって, この場合経路積分に現れる「ラグランジアン」は, ミンコフスキー時空で p を q と $\dot{q}$ で表したときのハミルトニアンに等しい.

補遺 B: ホモトピー群の一覧

この補遺では様々な多様体のホモトピー群[40]の一覧を示す. ここで Z は整数の群を表し, この群の積は和で定義され, したがってゼロが単位元だ. また Z_n は n を法とする整数の群だ. 元 0 から成る自明な群は 0 と表す. 多様体の直積のホモトピー群は各々の多様体のホモトピー群から積の法則によって得ることができる.

$$\pi_n(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \pi_n(\mathcal{M}_1) \times \pi_n(\mathcal{M}_2)\ .$$

球面

$$\pi_n(S_m) = 0 \quad (n < m)$$

$$\pi_n(S_n) = Z$$

$$\pi_{n+1}(S_n) = Z_2 \quad (\text{例外は } \pi_2(S_1) = 0;\ \pi_3(S_2) = Z)$$

$$\pi_{n+2}(S_n) = Z_2 \quad (\text{例外は } \pi_3(S_1) = 0)$$

$$\pi_{n+3}(S_n) = Z_{24} \quad (\text{例外は } \pi_4(S_1) = 0;\ \pi_5(S_2) = Z_2;\ \pi_6(S_3) = Z_{12};\ \pi_7(S_4) = Z \times Z_{12})$$

$$\pi_n(S_1) = 0 \quad (\text{例外は } \pi_1(S_1) = Z)$$

リー群の多様体

$$\pi_1(G) = \begin{cases} Z & G = U(1) \\ Z_2 & G = SO(n)\ (n \geq 3) \\ 0 & \text{その他の単純コンパクト連結リー群} \end{cases}$$

$$\pi_2(G) = 0 \qquad G : \text{任意のコンパクト連結リー群}$$

$$\pi_3(G) = Z \qquad G : \text{任意のコンパクト連結単純リー群}$$

$$\pi_4(G) = \begin{cases} Z_2 \times Z_2 & G = SO(4),\ Spin(4) \\ Z_2 & G = USp(2n),\ SU(2),\ SO(3),\ Spin(5),\ SO(5) \\ 0 & G = SU(n)\ (n \geq 3),\ SO(n)\ (n \geq 6),\ G_2,\ F_4,\ E_n \end{cases}$$

$$\pi_{4n+2}(USp(2n)) = \begin{cases} Z_{(2n+2)!} & n : \text{偶} \\ Z_{2(2n+2)!} & n : \text{奇} \end{cases}$$

$$\pi_{2n}(SU(n)) = Z_{n!}$$

ボット (Bott) の周期性定理

$n \geq (k-1)/4,\ k \geq 2$ のとき,

$$\pi_k(USp(2n)) = \begin{cases} Z & k = 3,7\ (mod\ 8) \\ Z_2 & k = 4,5\ (mod\ 8) \\ 0 & k = 0,1,2,6\ (mod\ 8) \end{cases}$$

$n \geq k+2,\ k \geq 2$ のとき,

$$\pi_k(SO(n)) = \begin{cases} Z & k = 3,7\ (mod\ 8) \\ Z_2 & k = 0,1\ (mod\ 8) \\ 0 & k = 2,4,5,6\ (mod\ 8) \end{cases}$$

$n \geq (k+1)/2,\ k \geq 2$ のとき,

$$\pi_k(SU(n)) = \begin{cases} Z & k : \text{奇} \\ 0 & k : \text{偶} \end{cases}$$

剰余類空間

任意のリー群 G と任意のリー部分群 $H \subset G$ について,

$$\pi_2(G/H) = \ker\left\{\pi_1(H) \mapsto \pi_1(G)\right\}$$

が成り立つ. すなわち, $\pi_2(G/H)$ は $\pi_1(H)$ の部分群で H が G に埋め込まれたときに $\pi_1(G)$ の自明な元に写像されるものだ. 特別の場合として,

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H) \qquad \text{for}\ \ \pi_1(G) = 0$$

が成り立つ.

問題

1. 4 次元ユークリッド時空でのゴールドストン・ボゾン場が, 作用を停留させるトポロジー的に自明でない場の配位を持つことを可能にするには, どんな種類の項を加える必要があるか?

2. ラグランジアンのカイラル対称性 $SU(2) \times SU(2)$ がアイソスピンの $SU(2)$ に自発的に破れる 6 元空間のスカラー場の理論を考える. スカーミオンが安定になるだけ十分な高次微分項がラグランジアンに加えられているとする. これらのスカーミオンはどんな種類の保存則に従うか? (ヒント : 2.7 節で示したように, $SU(2)$ はトポロジー的には S_3 と同等だ.)

3. $n > 1$ のとき任意の多様体 $\mathcal{M}$ について $\pi_n(\mathcal{M})$ は全て可換なことを示せ.

4. $SU(4)$ ゲージ理論の単位巻付き数を持つインスタントンの寄与の結合定数依存性はどうなっているか?

5. m_u, m_d, m_s が全て小さい場合のアクシオン質量の式を導け.

6. ラグランジアン密度,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 - \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 - g\phi$$

を持つ実スカラー場 ϕ の理論を考える. ここで m^2 と λ は正で g は非常に小さいとする. 準安定な真空状態の崩壊率における指数関数の抑制因子 $\exp(-B)$ を m^2, λ, g を用いて計算せよ.

参考文献

1. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz and Yu. S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59B**, 85 (1975).

2. G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B79**, 276 (1974); A. M. Polyakov, *JETP. Letters* **20**, 194 (1974).

3. T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. London* **A260**, 127 (1961).

4. H. Nielsen and P. Oleson, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).

5. Ya. B. Zel'dovich, I. Yu. Kobzarev, and L. B. Okun', *Sov. Phys. JETP* **40**, 2 (1975).

6. S. Coleman, *Phys. Rev.* **D15**, 2929 (1977); C. G. Callan and S. Coleman, *Phys. Rev.* **D16**, 1762 (1977). 23.8 節の議論はこれらの文献に基づいている. 対称性が破れた領域の形成に関する初期の研究については以下を見よ. T. D. Lee and G. C. Wick, *Phys. Rev.* **D9**, 2291 (1974); M. B. Voloshin, I. Yu. Kobzarev, and L. B. Okun', *Sov. J. Nucl. Phys.* **20**, 644 (1975).

7. S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B262**, 263 (1985); T. D. Lee and Y. Pang, *Phys. Rep.* **221**, 251 (1992), およびそこで引用されているリーと共同研究者達の他の文献.

8. これらの話題の極めて明快な概説と多くの原論文については, S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985) 6 章と 7章 を見よ. もっと最近のよい概説は E. J. Weinberg, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **42**, 177 (1992) に与えてある.

9. G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).

10. E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).

11. ホモトピー理論は初期宇宙での対称性の破れを調べるために, 以下の論文およびそこで引用された文献で使われている. T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976); A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

12. H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1494 (1972).

13. J. Arafune, P. G. O. Freund, and C. J. Goebel, *J. Math. Phys.* **16**, 433 (1975).

14. M. K. Prasad and C. M. Sommerfeld, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).

15. B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.* **D11**, 276 (1974); **D13**, 819 (1976).

16. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* **A133**, 60 (1934); *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).

17. Ya. B. Zel'dovich and M. Yu. Khlopov, *Phys. Lett.* **79B**, 239 (1978); J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1365 (1979). 概説については J. Preskill, *Annual Rev. Nucl. Part. Science* **34**, 461 (1984) を見よ.

18. 例えば S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) 15 章を見よ.

19. A. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981); A. D. Linde, *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982); A. Albrecht and P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).

20. R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D13**, 3398 (1976).

21. V. A. Rubakov, *JETP Lett.* **33**, 644 (1981); *Nucl. Phys.* **B212**, 391 (1982); C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D25**, 2141 (1982); *Phys. Rev.* **D26**, 2058 (1982); *Nucl. Phys.* **B212**, 391 (1982).

22. R. Bott, *Bull. Soc. Math. France* **84**, 251 (1956).

23. G. 't Hooft, *Phys. Rev.* **D14**, 3432 (1976); *Phys. Rep.* **142**, 357 (1986).

24. M. Atiyah and R. Ward, *Commun. Math. Phys.* **55**, 117 (1977).

25. G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976). ト・フーフトは, ここで使ったアノマリーのない保存カレントを同定するかわりに, 与えられた巻付き数のインスタントンについて各々の量子数の変化を与えるディラック演算子のゼロ・モードの解析 (23.7 節を見よ) を基にして選択則を導いた.

26. C. G. Callan, R. F. Dashen, and D. J. Gross, *Phys. Lett.* **63B**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172 (1976).

27. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **155B**, 36 (1985). この遷移は主にスファレロン (sphaleron) と呼ばれる場の配位によって引き起こされる. N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D28**, 2019 (1983); F. R. Klinkhammer and N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D30**, 2212 (1984); R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10**, 4138 (1974) を見よ.

28. H. Georgi and I. McArthur, 未発表 (1981); D. B. Kaplan and A. V. Manohar, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2004 (1986); K. Choi, *Nucl. Phys.* **B383**, 58 (1992).

29. より詳細な計算は V. Baluni, *Phys. Rev.* **D19**, 2227 (1978); R. J. Crewther. P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, *Phys. Lett.* **88B**, 123 (1979) を見よ.

30. R. D. Peccei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev.* **D16**, 1791 (1977).

31. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 279 (1978).

32. J. E. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979); M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B166**, 493 (1980); A. R. Zhitnitsky, *Sov. J. Nucl. Phys.* **31**, 260 (1980); M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, *Phys. Lett.* **104B**, 199 (1981).

33. S. Weinberg, *Neutrinos '78*, E. C. Fowler 編 (Purdue, Lafayette, 1978).

34. D. A. Dicus, E. W. Kolb, V. I. Teplitz, and R. V. Wagoner, *Phys. Rev.* **D18**, 1829 (1978); **D22**, 839 (1980).

35. 概説については M. S. Turner, *Phys. Rept.* **197**, 67 (1990); G. G. Raffelt, *Phys. Rept.* **198**, 1 (1990) を見よ.

36. J. Preskill, M. B. Wise, and F. Wilczek, *Phys. Lett.* **120B**, 127 (1983); L. F. Abbott and P. Sikivie, *Phys. Lett.* **120B**, 127 (1983); M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett.* **120B**, 137 (1983). 概説は J. E. Kim, *Phys. Rep.* **150**, 1 (1987); M. S. Turner, *Phys. Rep.* **197**, 68 (1990) を見よ.

37. S. Coleman, V. Glaser, and A. Martin, *Commun. Math. Phys.* **58**, 211 (1978).

38. S. Coleman, 文献 8, 6.2 節.

39. S. Coleman, 文献 8, 6.5 節.

40. A. Actor, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 461 (1979); *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* (MIT Press, Cambridge, 1980) 補遺 A.

訳者あとがき

本シリーズは, Steven Weinberg 氏の “The Quantum Theory of Fields” I, II 巻の日本語訳である. このシリーズでは, Weinberg 氏は一貫して場の理論の論理性を中心に議論を進めている. つまり, 真の基本理論は弦理論やその更にその奥から姿を表しつつある理論であっても, 場の理論は量子力学と特殊相対性理論の基本的要請から我々の世界を記述する有効理論として成立するというのが著者の視点だ. この意味で, 同じ時期に出た他の場の量子論の本と比べても, このシリーズは非常にユニークなものであるといえる.

原著 I 巻は, 日本語訳では 1, 2 巻に分冊した. 1 巻では, 場の理論自身の構成が詳細に議論され, その後に実際の物理的過程を計算するためのファインマン則が述べられた. 2 巻では, 場の理論形式が正準理論, 経路積分と述べられ, くりこみ等が議論された.

これらの場の理論の基礎に基づいて, 原著 II 巻では各種の重要な概念が論じられる. この原著 II 巻は日本語訳 3, 4 巻に分冊した. 3巻では, 現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され, 有効場の理論, くりこみ群, 大局的対称性の自発的破れの理論に基づく解析がそれらの一般論とともに有機的に展開された. 本4巻では, 演算子積展開, ゲージ対称性の自発的破れ, アノマリー, 拡がりのある場の配位などが論じられる. 読者は, 場の理論の基礎を一通り学んだ上で第3巻から第4巻を通して学ぶことにより, 場の理論の現代的様相に到達できるであろう. 著者 Weinberg はさらに超対称性, 超重力理論についての続巻も計画しており, 本書はその更なる飛躍への準備ともなる.

この本を作るにあたって, 著者 S. Weinberg 氏には快く Cambridge University Press との仲介の労をとっていただいた. また, Cambridge University Press の A. Woollat 氏には原著の LaTeX 原稿, および原著

II巻第1刷に対する詳細な修正リストを送って頂き, これを本訳書に全て反映させることができた. ここに感謝の意を表したい. (また本訳書では, 参考文献で原著にプレプリント番号のみ記載されているもののうち掲載先が分かったものについては, 掲載先を挙げるようにした.)

また, 本書の出版に際し, 吉岡書店の上川正二氏に大変お世話になった. ここに記して感謝する.

1999年3月 訳者

索引

人名

イタリック体のページ番号は「関連書誌」と
「参考文献」に引用した文献を示す.

日本語事項

英語事項

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982—1988年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988年：京都大学理学部助手

現在：京都大学総合人間学部基礎科学科教授
訳書に「物理学演習モスクワの森」（コゼル他編，吉岡書店）（共訳），「場の理論—統計論的アプローチ」（パリージ著，吉岡書店）（共訳），「経路積分法」（スワンソン著，吉岡書店）（共訳）

有末　宏明（ありすえ　ひろあき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：京都大学理学博士

1982—1983年：日本学術振興会奨励研究員

1983—1985年：京都大学基礎物理学研究所研究員

1985—現在：大阪府立工業高等専門学校教授
訳書に「Maple V数学解法辞典」（デビット著，オーム社（共訳））

物理学叢書

＊編　集＊

小　林　　稔
（京都大学名誉教授）

井　上　　健
（京都大学名誉教授）

山　本　常　信
（京都大学名誉教授）

高　木　修　二
（大阪大学名誉教授）

S. Weinberg：場の量子論（4巻）　場の量子論の現代的諸相1999 ©

2000年6月25日　　第2刷発行

訳　者　青　山　秀　明
　　　　有　末　宏　明

発行者　吉　岡　　誠

〒606-8225 京都市左京区田中門前町87

株式会社　吉　岡　書　店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0271-0

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物 理 学 叢 書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

シッフ　井上　健訳 新版 量子力学 上・下 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ゴールドスタイン　瀬川富士他訳 新版 古典力学 上・下 上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
モット，マッセイ　高柳和夫他訳 新版 衝突の理論 (全4巻) 上Ⅰ　上・Ⅱ 328頁 下Ⅰ　下・Ⅱ 232頁	量子力学の重要な適用対象である衝突理論を丁寧に述べた代表的教科書である．衝突の一般論と，電子衝突，原子と原子の衝突，さらに原子核による核子の散乱など多くの実際問題を扱っている．
ライフ　中山寿夫・小林祐次訳 統計熱物理学の基礎 上・中・下 上 388頁　中 352頁　下	統計力学の基礎概念から応用まで体系的に取扱い，初心者が容易に理解できるよう豊富な例題を駆使して懇切丁寧に解説した学部学生向き教科書の決定版．化学・生物の学生にも理解し易い記述である．
キャレン　山本常信・小田垣孝訳 熱力学 上・下 上　下 216頁	この教科書は従来の歴史的発展に沿った記述を取らず，いくつかの公理に基づいて熱力学を再構築し，論理構造を明確にした．今後の熱力学の発展と飛躍のためにこのような安定化のもつ意義は深い．

頁数記載なきは品切もしくは未刊